

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR DE GANDIA
Máster en Ingeniería Acústica



**UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA**



“Difusores acústicos basados en resonadores de membrana y placa”

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Autor/a:
Jose Manuel Requena Plens

Tutor/a:
Noé Jiménez González
Francisco Camarena Femenía

GANDIA, 2021

Abstract

Traditional acoustic diffusers are based on quarter-wavelength resonators built using slotted panels. The use of this kind of resonators imply that these panels can hardly be manufactured to work at low frequencies due to the resulting high thickness. Recently, the use of resonant metamaterials based on Helmholtz resonators, i.e., metadiffusers, has been proposed in order to reduce panel thickness. In this work we propose the use of plate and membrane resonators to go one step further in managing sound reflection using ultrathin metasurfaces of deep subwavelength dimensions.

Keywords Acoustics; Sound diffusers; acoustic diffusers; metasurfaces; membrane resonator; plate resonator; metadiffuser; metamaterial; scattering;

Resumen

Los difusores acústicos tradicionales están basados en resonadores de cuarto de longitud de onda construidos con paneles ranurados. Es por ello que dichos paneles difícilmente pueden ser fabricados para trabajar en bajas frecuencias debido al elevado espesor resultante. Recientemente se ha propuesto el uso de metamateriales resonantes basados en resonadores de Helmholtz para reducir el espesor del panel, es decir, metadifusores. En este trabajo se propone el empleo de resonadores de placa y membrana para ir un paso más allá, consiguiendo controlar la reflexión del sonido empleando metasuperficies ultraplanares con un espesor mucho más pequeño que la longitud de onda.

Palabras clave Acústica; Difusores de sonido; difusores acústicos; metasuperficie; resonador de membrana; metamaterial; metadifusor; scattering;

*Jamás desesperes,
aún estando en las más sombrías aflicciones,
pues de las nubes negras cae agua limpia y fecundante.*

Miguel de Unamuno.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Objetivos	1
2. Estado del arte	3
2.1. Difusores acústicos	3
2.2. Aplicaciones de los difusores	3
2.2.1. Ecos y eco flutter	4
2.2.2. Filtros peine	4
2.2.3. Zona libre de reflexiones	5
2.3. Reflexión especular y difusa	6
2.3.1. Difusión	6
2.3.2. Scattering	7
2.4. Tipos de difusores	8
2.4.1. Quadratic residue sequence (QRD)	8
2.4.2. Primitive root sequence (PRD)	10
2.4.3. Maximum-Length sequences (MLS)	11
2.4.4. Index sequences	12
2.4.5. Ternary-Quadriphase sequences	12
2.4.5.1. Ternary	13
2.4.5.2. Quadriphase	14
2.4.6. Difusores volumétricos	14
2.4.6.1. Piramides y triángulos	15
2.4.6.2. Superficies convexas	16
2.4.7. Cristales de sonido	17
2.4.8. Metadifusores	18
3. Métodos	21
3.1. Cálculo teórico	21
3.1.1. Impedancia acústica de los resonadores	21
3.1.1.1. Resonadores de cuarto de longitud de onda (QWR)	21
3.1.1.2. Membranas o placas elásticas	22
3.1.2. Método de la matriz de transferencia	25
3.1.2.1. Matriz de transferencia total	26
3.1.2.2. Parámetros de la matriz de transferencia total	27
3.1.2.2.1. Número de onda	27
3.1.2.2.2. Impedancia acústica característica	27
3.1.2.2.3. Densidad y módulo de Bulk	27
3.1.2.2.4. Impedancia acústica específica	28

3.1.3. Pérdidas viscotérmicas en las cavidades y viscoelásticas en las placas y membranas	28
3.1.3.1. Cavidades	28
3.1.3.1.1. Densidad y módulo de Bulk efectivos	28
3.1.3.1.2. Número de onda efectivo	29
3.1.3.1.3. Impedancia acústica característica efectiva	29
3.1.3.1.4. Forma matricial	30
3.1.3.2. Placas o membranas elásticas	30
3.1.3.2.1. Densidad y módulo de Young efectivos	30
3.1.3.2.2. Impedancia acústica característica efectiva	30
3.1.3.2.3. Forma matricial	30
3.1.4. Cálculo del coeficiente de reflexión	31
3.1.5. Cálculo del scattering polar en campo lejano	32
3.1.6. Cálculo de los parámetros de difusión y scattering	32
3.1.6.1. Coeficiente de difusión	32
3.1.6.2. Coeficiente de correlación del scattering	34
3.1.7. Diseño QRD de fracción de longitud de onda (subwavelength)	35
3.2. Cálculo numérico	36
3.2.1. Herramienta COMSOL [®]	37
3.3. Optimización	38
3.3.1. Optimización de objetivo único	39
3.3.2. Optimización multiobjetivo	39
4. Resultados	41
4.1. Validación del método analítico	41
4.1.1. Cavidad simple con placa	41
4.1.2. QRD con placa	42
4.2. Comparaciones con y sin placa	43
4.3. Distribución de cavidades de residuo cuadrático	44
4.3.1. Estándar	44
4.3.2. Subwavelength	44
4.4. Optimización de un difusor con resonador de placa	45
5. Conclusiones	49
5.1. Líneas futuras	49
Bibliografía	51
A. Datos adicionales de los resultados	55
A.1. Características físicas de las placas elásticas y del medio	55

1. Introducción

1.1. Presentación

El presente trabajo, Trabajo Final de Máster, se ha realizado para la obtención del título en Máster en Ingeniería Acústica de la Universitat Politècnica de València, bajo la supervisión de Noé Jiménez González.

En este documento se presenta el desarrollo de difusores acústicos basados en resonadores de membrana y placa, planteando nuevas opciones en el campo de los difusores acústicos y la acústica de recintos.

La estructura del documento consta de los siguientes puntos:

- **Introducción.**
- **Estado del arte.** Donde se describe y analiza la teoría actualmente establecida y necesaria para el desarrollo del trabajo.
- **Métodos.** Donde se describen los métodos implementados para la realización del trabajo.
- **Resultados.** En él se muestran los resultados obtenidos a partir de la aplicación de los métodos implementados.
- **Conclusiones.** Conceptos extraídos de los resultados y posibles mejoras o ampliaciones del trabajo realizado.

1.2. Objetivos

Este trabajo trata de desarrollar y analizar el uso de resonadores de membrana y placa en difusores, a continuación se detallan las características principales.

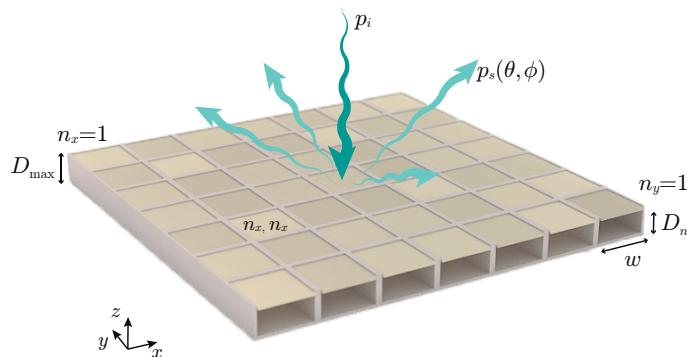


Figura 1.1: Diseño conceptual de un metadifusor QR bidimensional con membrana o placa.

Para el desarrollo es necesario plantear las ecuaciones necesarias para considerar toda la física implicada en el problema y así poder calcular el campo acústico producido por un difusor con resonadores de placas, es decir, definir un modelo analítico. Debido a la complejidad se implementará el método de la matriz de transferencia o TMM por sus siglas en inglés, con el que se podrá obtener los parámetros físicos necesarios del sistema cavidad-placa teniendo en cuenta las pérdidas viscotérmicas y viscoelásticas.

En este trabajo solo se muestran los cálculos cuando se utilizan placas elásticas. La diferencia entre membranas y placas es que las primeras están sujetas con tensión y las segundas solo soportadas sobre el difusor. Debido a que se pretende que se puedan realizar experimentos que validen los resultados en el futuro, se ha prescindido de realizar los cálculos con tensión ya que en la práctica es complejo aplicar la misma tensión en todas direcciones, que esta se mantenga estable y sea la misma en todas las membranas. De todos modos se incluirá la matemática necesaria para tener un modelo analítico de difusor con membranas.

El modelo analítico debe ser validado por otro modelo para verificar que los resultados son correctos, en este caso se utilizará un modelo realizado con el método de los elementos finitos, o FEM, para verificar que los resultados obtenidos con el modelo analítico son correctos.

Por último se optimizará el diseño del difusor mediante el uso algoritmos de optimización, probando múltiples profundidades o tamaños de cavidad hasta obtener el diseño que maximice los parámetros de difusión.

2. Estado del arte

2.1. Difusores acústicos

Un difusor acústico es un elemento pasivo que distribuye la energía acústica incidente tanto en el espacio como en el tiempo de modo más o menos homogéneo, es decir, produce una reflexión no specular. Este elemento contribuye (generalmente) en la mejora de calidad acústica de un recinto impidiendo la formación de ondas estacionarias, filtros *peine* o focalizaciones en las frecuencias de trabajo del difusor.

Cuando un frente de onda incide sobre una superficie parte de la energía se absorbe y el resto se refleja, esa reflexión puede ser specular (mismo ángulo de reflexión que el incidente), difusa (múltiples direcciones) o una mezcla de ambas. Que se produzca alguna de esas reflexiones depende tanto de la forma de la superficie como de la frecuencia de la onda incidente, en el punto 2.3 se explica en detalle esta característica.

Dependiendo de la forma de un recinto es posible que se produzcan focalizaciones de la presión acústica en algún punto del mismo debido a superficies planas o cóncavas. Como se puede deducir si las ondas se reflejan por las superficies estas vuelven a encontrarse en algún punto del recinto con diferentes retardos (desfasadas) produciendo en algunos puntos interferencias constructivas y destructivas perdiendo la información espectral que tenía la onda inicialmente. Todos estos problemas pueden ser solventados, en parte, mediante la difusión del frente de onda, distribuyendo la energía a lo largo del espacio minimizando el efecto de las interferencias y evitando reflexiones especulares que producirían ondas estacionarias.

Existen diferentes configuraciones en las irregularidades y formas de la superficie del difusor para obtener distintas distribuciones de energía y frecuencias (en el punto 2.4 se explican algunas de estas configuraciones). Las más comunes son los difusores de Schroeder (1975, 1984, 1988, 1995), todos ellos aprovechan la diferencia de caminos de la onda incidente sobre las cavidades del difusor para producir interferencias modificando el patrón polar de la reflexión, es decir, produciendo difusión.

2.2. Aplicaciones de los difusores

Los problemas de ecos y eco flutter o aleteo (*flutter echoes*) pueden solucionarse mediante la aplicación de materiales absorbentes pero existe una desventaja, esta solución reduce la energía acústica en el recinto que, en la mayoría de las ocasiones, se necesita para que en la zona de recepción se alcance un nivel de presión sonora aceptable. Para mantener la energía acústica se puede hacer uso de difusores que, casi sin introducir absorción, permiten reducir o eliminar los problemas de ecos tan sólo modificando el frente de onda.

Otros problemas que pueden solucionarse mediante el uso de difusores acústicos son los filtros *peine* que se producen al coincidir en el espacio y en desfase el frente de onda original y el reflejado.

Además, con el uso de difusores acústicos es posible mejorar la inteligibilidad del habla, aumentar la sensación de espacialidad o distribuir homogéneamente el campo acústico sobre el área de audiencia.

2.2.1. Ecos y eco flutter

Los ecos y eco flutter se producen cuando las superficies en las que incide una onda son rígidas, es decir, tienen una reflexión predominantemente especular. El eco flutter es un caso particular en el que la onda incidente es reflejada especularmente por una superficie en dirección a otra superficie paralela donde sucederá lo mismo, esto se repetirá de forma constante mientras el nivel de presión acústica decae debido a la absorción del aire, de las superficies y la divergencia. Esto produce un eco con la tonalidad modificada, más cercano a un sonido metálico.

Para solucionar los problemas de eco se debe *romper* el camino que recorre la onda para cambiar su dirección o para distribuir su energía de forma espacial y temporal. Esto es posible utilizando difusores acústicos.

2.2.2. Filtros peine

Es uno de los problemas habituales en recintos pequeños como salas de ensayo, estudios de grabación, etc, nada impide que se puedan producir en recintos de mayores dimensiones aunque es mucho más difícil que ocurra debido a la, presumiblemente, mayor complejidad de las reflexiones.

Estos filtros provocan que en ciertos puntos del espacio la onda incidente se encuentra con la reflejada, debido a reflexiones especulares, produciendo interferencias constructivas y destructivas como se puede observar en la figura 2.1. Se puede observar en la figura que aumentando la difusión de las reflexiones se consigue una respuesta en frecuencia en el punto de escucha más plana, consiguiendo así que el sonido recibido no contenga coloraciones producidas por el recinto.

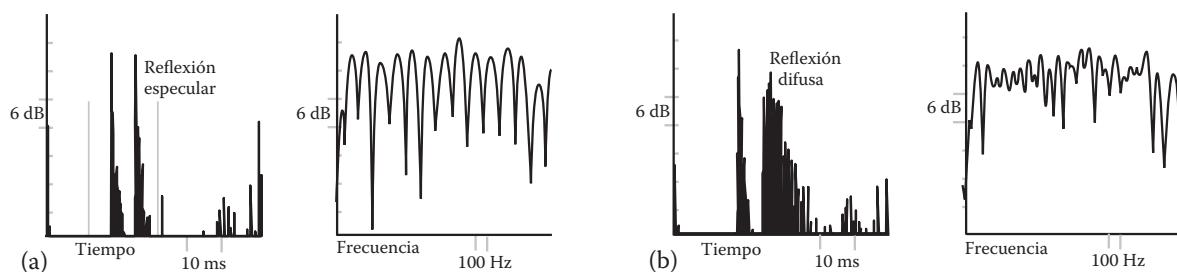


Figura 2.1: Ecograma y respuesta en frecuencia del campo acústico total para: (a) reflexión especular, (b) reflexión difusa. Figura extraída de D'Antonio y Cox (2000).



Figura 2.2: Estudio 1 de *The Hit Factory*, Nueva York. Diseñado por Studio Design Group LLC.

2.2.3. Zona libre de reflexiones

Los difusores son indispensables para conseguir zonas libres reflexiones o RFZ por sus siglas en inglés, un aspecto muy importante en estudios de producción, mezcla o edición de sonido, donde es necesario minimizar los efectos comentados anteriormente. La solución que se puede plantear inicialmente para conseguir esta zona es cubrir todas las superficies con absorbente pero esto produce que el sonido se perciba desde un único punto, algo que es irreal, es necesario combinar el uso de absorción y difusión para mantener una energía acústica aceptable con una imagen espacial del sonido lo más cercana a la realidad.

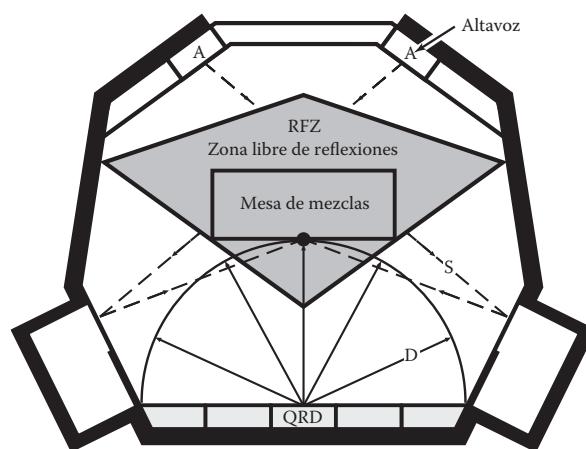


Figura 2.3: Diseño de un recinto para la mezcla de sonido con una zona libre de reflexiones (área gris), con difusores QRD en la parte trasera. Figura extraída de D'Antonio y Cox (2000)

2.3. Reflexión especular y difusa

La reflexión del sonido producida por una superficie puede ser especular, como la producida por una superficie plana, o difusa, producida por superficies con irregularidades.

Qué se produzca difusión al incidir sobre un material depende principalmente de la frecuencia (en el mismo orden que en la figura 2.4):

- Si la longitud de onda es muy grande frente a las irregularidades se producirá reflexión especular.

$$\lambda \gg 2a \quad \text{o} \quad \lambda \gg 2h. \quad (2.1)$$

- Si la longitud de onda es comparable a las dimensiones de las irregularidades el sonido se difracta, dispersándose en múltiples direcciones en función de la geometría de la superficie y produciendo difusión.

$$\lambda \approx 2a \quad \text{y} \quad \lambda \approx 2h. \quad (2.2)$$

- Si la longitud de onda es muy pequeña frente a las dimensiones de las irregularidades en la superficie del material se producirá concentración del sonido en una o varias direcciones.

$$\lambda \ll 2a \quad \text{y} \quad \lambda \ll 2h. \quad (2.3)$$

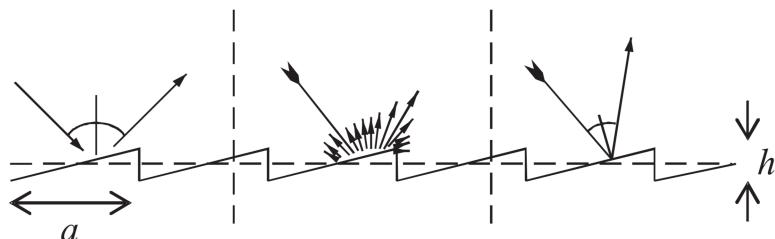


Figura 2.4: Comportamiento de la energía acústica al incidir en una superficie. Figura extraída de T. Cox, Dalenback, y cols. (2006).

2.3.1. Difusión

El coeficiente de difusión indica cuan uniforme es la distribución de la energía acústica reflejada por una superficie, es decir, a mayor valor del coeficiente (toma valores entre 0 y 1) mas homogénea es la energía tanto espacialmente como en términos de intensidad en la distribución de las reflexiones.

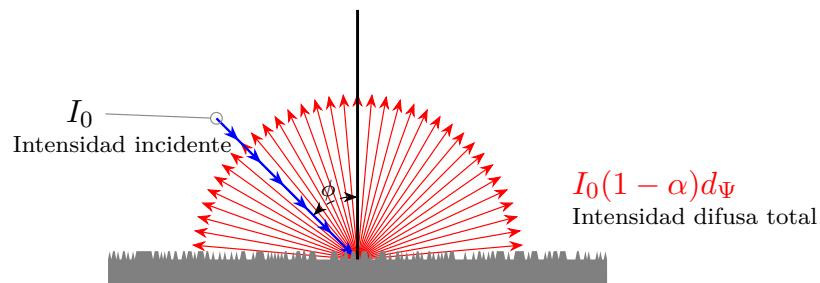


Figura 2.5: Distribución de la energía al incidir en un difusor con un coeficiente de difusión igual a 1. La intensidad difusa total es la suma de las intensidades de todo el campo difuso (todos los rayos rojos).

Este coeficiente se puede entender mejor teniendo en mente el concepto de factor de direccitividad de las fuentes. En el caso de la difusión un valor igual a 1 indica que la energía se distribuye homogéneamente en todas direcciones y, según se reduce el coeficiente, el patrón polar de las reflexiones se reduce produciendo lóbulos directivos.

2.3.2. Scattering

Su traducción literal es coeficiente de dispersión pero, debido a los malentendidos que se puedan producir con el fenómeno de dispersión temporal que implica que la velocidad de fase o grupo dependen de la frecuencia, se utiliza *scattering* o *esparcimiento*. Su utilidad es la de relacionar la energía reflejada especularmente y la energía reflejada en otras direcciones.

Conociendo el coeficiente de scattering se puede conocer la energía de la reflexión especular y la energía de las reflexiones difusas, pero sin conocer su distribución espacial o polar. Es útil para conocer cuánto reduce un difusor la reflexión especular aunque no aporta información sobre la dirección o direcciones del resto de reflexiones. El uso principal de este coeficiente se encuentra en los algoritmos de programas de predicción acústica basados en acústica geométrica (T. Cox, Dalenback, y cols., 2006), con este parámetro se consigue simular la cantidad de reflexión especular y la cantidad de una serie de reflexiones en direcciones aleatorias tal que su suma es igual a $I_0(1 - \alpha)s$.

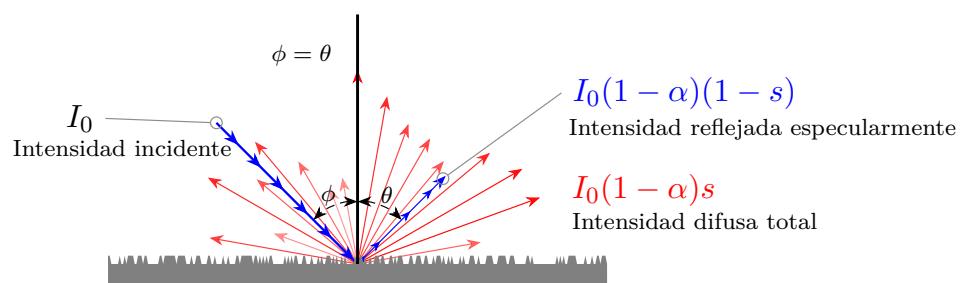


Figura 2.6: Distribución de la energía al incidir en un difusor.

2.4. Tipos de difusores

Existen múltiples tipos de difusores, cada uno de ellos con características concretas tanto en respuesta acústica como en geometría, a continuación se describen una gran parte de ellos y en concreto se define con mayor detalle los QRD debido a que es la base inicial de este trabajo.

2.4.1. Quadratic residue sequence (QRD)

Este diseño fue definido por Schroeder (1979) basándose en la Ley de la Reciprocidad Cuadrática establecida por Euler (criterio de Euler, 1748) y Legendre (símbolo de Legendre, 1798), demostrada después por Gauss (lema de Gauss, 1808 y 1818).

Los difusores QRD son los más utilizados en la actualidad en acústica de recintos, ya que forman geometrías periódicas visualmente atractivas y un rendimiento óptimo en medias y altas frecuencias. Para realizar el diseño es necesario definir la frecuencia mínima a la que se desea producir difusión, esto es clave ya que de ello depende el espesor del difusor: a menor frecuencia, mayor espesor.

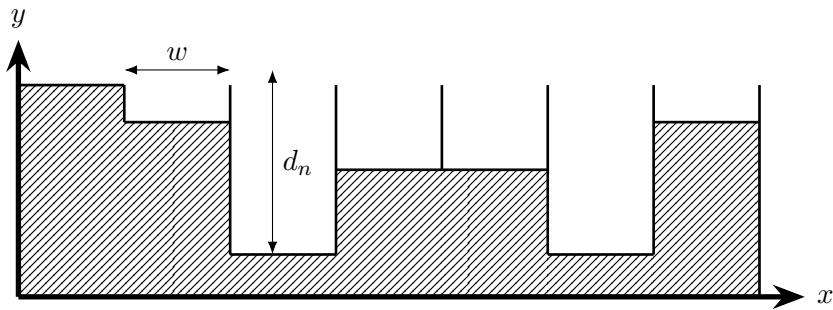


Figura 2.7: Corte transversal de un difusor QRD con $N = 7$. Las finas láminas rígidas entre las cavidades permiten mejorar la difusión en el caso de que la incidencia del sonido sea tangencial al difusor.

El diseño de las profundidades depende de una secuencia numérica que se obtiene del siguiente modo para un difusor unidimensional:

$$s_n = n^2 \bmod N, \quad (2.4)$$

dónde $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

En el caso de un diseño bidimensional la secuencia numérica se obtiene con:

$$s_{n,m} = (n^2 + m^2) \bmod N, \quad (2.5)$$

dónde $m = n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Antes de realizar el módulo se puede restar a los vectores n y m el valor $r_0 = \lceil N/2 \rceil$ para así obtener el valor 0 en el centro de los vectores tal que los vectores comprendan desde $-\lfloor N/2 \rfloor$

a $+[N/2]$. Una vez realizadas las operaciones la secuencia numérica tendrá una apariencia como las de la figura 2.8.

2	4	1	0	1	4	2
---	---	---	---	---	---	---

(a) Unidimensional.

4	6	3	2	3	6	4
6	1	5	4	5	1	6
3	5	2	1	2	5	3
2	4	1	0	1	4	2
3	5	2	1	2	5	3
6	1	5	4	5	1	6
4	6	3	2	3	6	4

(b) Bidimensional.

Figura 2.8: Un periodo de la secuencia de un QRD con $N = 7$.

Una vez se tienen las secuencias numéricas se deben obtener las profundidades de cada cavidad teniendo en cuenta la frecuencia mínima a partir de la cual comenzará a producir difusión. Esta profundidades se obtienen con:

$$d_n = \frac{s_n \lambda_0}{2N}, \quad d_{n,m} = \frac{s_{n,m} \lambda_0}{2N}. \quad (2.6)$$

Por ejemplo, para una frecuencia de 1000 Hz, el valor de las profundidades quedaría tal como se muestra en la figura 2.9.

4.89	9.78	2.45	0	2.45	9.78	4.89
------	------	------	---	------	------	------

(a) Unidimensional.

9.78	14.67	7.34	4.89	7.34	14.67	9.78
14.67	2.45	12.23	9.78	12.23	2.45	14.67
7.34	12.23	4.89	2.45	4.89	12.23	7.34
4.89	9.78	2.45	0	2.45	9.78	4.89
7.34	12.23	4.89	2.45	4.89	12.23	7.34
14.67	2.45	12.23	9.78	12.23	2.45	14.67
9.78	14.67	7.34	4.89	7.34	14.67	9.78

(b) Bidimensional.

Figura 2.9: Profundidades en centímetros de un QRD con $N = 7$

El ancho de la cavidad, w , teóricamente debe ser proporcional a la frecuencia máxima a la

que se desea que el difusor no produzca modos cruzados tal que:

$$w = \lambda_{\min}/2. \quad (2.7)$$

Aun así, a frecuencias mayores, la difusión sigue produciéndose correctamente, es decir, esta frecuencia indica la frecuencia máxima a la que la difusión del panel será la teórica para un QRD. Por lo que no es estrictamente necesario definir el ancho de la cavidad respecto a una frecuencia máxima de trabajo.

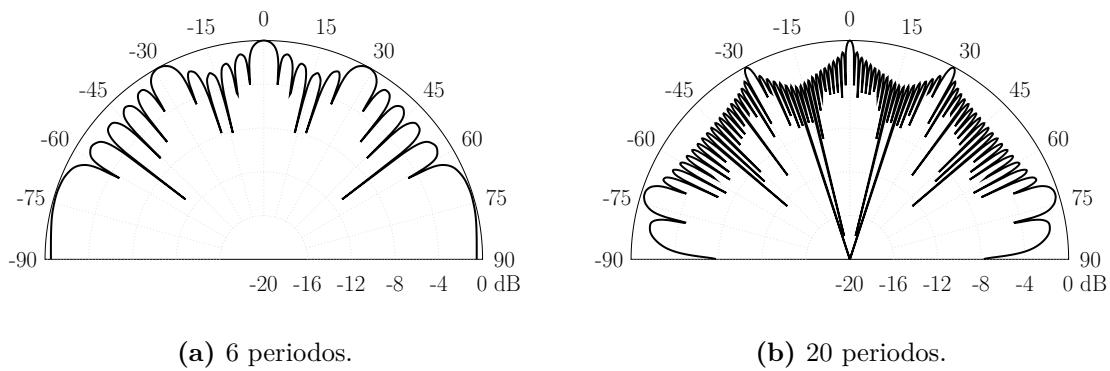


Figura 2.10: Respuesta de un difusor QRD con $N = 7$ a 3000 Hz.

Las frecuencias críticas en un QRD indican cuando este responde como un panel plano, y se encuentran en:

$$f_c = mNf_0, \quad (2.8)$$

dónde $m = 1, 2, 3, \dots$

Para evitar estas frecuencias críticas se debe usar un valor mínimo del número primo N , tal que:

$$N > \frac{c}{2wf_0}. \quad (2.9)$$

2.4.2. Primitive root sequence (PRD)

Desarrollado por Schroeder (1984, cap. 13), este difusor se diseña de forma similar al QRD pero en este caso utilizando las raíces primitivas tal que:

$$s_n = r^n \bmod N, \quad (2.10)$$

dónde N es un número primo mayor que 2, $n = 1, 2, \dots, N - 1$ y r es la raíz primitiva de N .

El número de cavidades de este difusor es igual a $N - 1$. Por lo que el cálculo de las

profundidades difiere ligeramente del de un QRD:

$$d_n = \frac{s_n \lambda_0}{2(N - 1)}. \quad (2.11)$$

Sus frecuencias críticas se obtienen con:

$$f_c = \frac{mNf_0}{N - 1}, \quad (2.12)$$

dónde $m = 1, 2, 3, \dots$

Este tipo de difusor produce un filtro notch en la zona de la reflexión specular, eliminando la reflexión specular alrededor de la frecuencia de diseño. Por lo general la reflexión specular se ve reducida $20 \log_{10}(N)$.

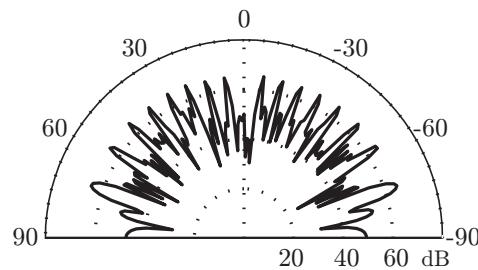


Figura 2.11: Respuesta de un difusor PRD con $N = 37$. Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

2.4.3. Maximum-Length sequences (MLS)

Desarrollado por Schroeder (1975), este tipo de difusor hace uso, como su propio nombre indica, de las secuencias MLS para introducir huecos o no en una superficie tal que el resultado quedaría como la figura 2.12.

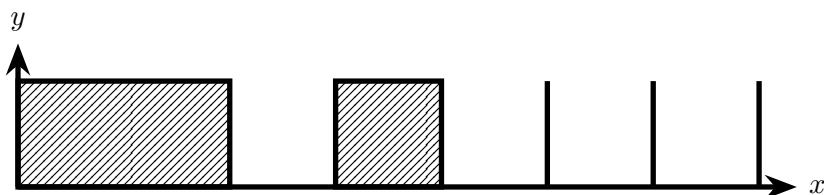


Figura 2.12: Corte transversal de un periodo de un difusor MLS con $N = 7$.

Este tipo de difusor solo tiene dos valores de profundidad, 0 cuando el valor en la secuencia MLS es 0 y d cuando el valor en la secuencia es 1:

$$d = \lambda/4, \quad (2.13)$$

dónde λ es la longitud de onda de la frecuencia de diseño.

En los difusores MLS las frecuencias de resonancia solo se encuentran en los múltiplos pares de la frecuencia de diseño y, para que el cálculo de estas frecuencias sean válidas y el difusor funcione correctamente, la profundidad siempre debe ser mayor que el ancho de las cavidades.

La respuesta de este difusor a la frecuencia de diseño es similar al QRD a excepción del lóbulo central que sufre una reducción de nivel de $10 \log_{10}(N + 1)$ dB. Su banda de trabajo comprende solo una octava alrededor de la frecuencia de diseño y múltiplos impares de esta.

2.4.4. Index sequences

Desarrollado por Schroeder (1995), este tipo de difusor se realiza con raíces primitivas como el diseño PRD pero del siguiente modo:

$$n = r^{s_n} \bmod N, \quad (2.14)$$

dónde $n = 1, 2, 3, \dots, N$ es el número primo generador, s_n es la secuencia de números buscada o función de índice y r es la raíz primitiva de N .

Las profundidades de cada cavidad se obtienen del mismo modo que los difusores PRD (ecuación 2.11).

Este tipo de diseño tiene una banda de trabajo definida entre su frecuencia de diseño y $N - 2$ veces esta. Ademas tiene la peculiaridad de que en las cavidades donde la profundidad es máxima el coeficiente de reflexión es 0 y esta se rellena con material absorbente, produciendo finalmente que el difusor absorba $20 \log_{10}(N - 1)$ de la energía recibida (ver figura 2.13).

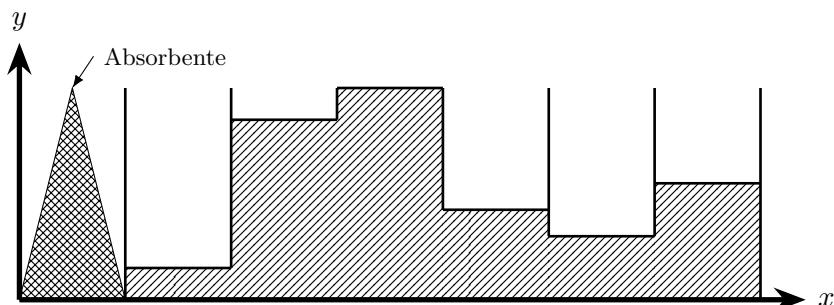


Figura 2.13: Corte transversal de un periodo de un difusor Index con $N = 7$ y $r = 3$.

2.4.5. Ternary-Quadriphase sequences

Desarrollado por T. Cox, Angus, y D'Antonio (2006), este tipo de difusores son híbridos, utilizan absorbentes para reducir la reflexión especular y superficies rígidas para difundir el resto. Este tipo de diseño consigue reducir aun más la reflexión especular al producir mayores interferencias en la reflexión.

2.4.5.1. Ternary

Esta secuencia, ternaria, se basa en las secuencias MLS pero consigue una reducción ligeramente mayor de la reflexión espectral, de $20 \log_{10}(N/2)$ y todos los lóbulos tienen la misma amplitud en la frecuencia de diseño y sus múltiplos impares. Esto se consigue gracias a que en lugar de secuencias de números de valor 0 y 1, se utilizan secuencias -1, 0 y 1, consiguiendo así coeficientes de reflexión negativos, cero y positivos.

El difusor solo tiene una profundidad de cavidad, $\lambda_0/4$ y esta se ubica en las cavidades correspondientes al valor -1 en la secuencia numérica, las cavidades con valor 0 son superficies absorbentes y las cavidades con valor 1 son superficies rígidas o reflectantes, ambas a la misma profundidad $d_n = 0$.

La secuencia numérica se obtiene a partir de dos secuencias MLS de orden impar, una complementaria de la otra, se calcula la covarianza de la correlación cruzada de ambas y a partir de esta se obtiene la secuencia ternaria. Explicado matemáticamente paso a paso, la secuencia MLS que se debe generar debe tener una longitud de $N = 2^m - 1$ donde $m \neq 04$, es decir, $m \neq 4, 8, 12, \dots$, después de obtener su complementaria copiando muestras de la original a intervalos de $\Delta n = 2^k + 1$ o $\Delta n = 2^{2k} - 2^k - 1$ donde k es un número entero mayor que 0. Teniendo los valores de m y k se obtiene máximo común divisor $e = \text{mcd}(m, k)$, que servirá para verificar que m/e es un número impar y por tanto se producirá una distribución de valores de la covarianza cruzada correcta. Esta covarianza tendrá 3 posibles valores, -1, 0 y 1 con la siguiente distribución:

$$S_{ab} = \begin{cases} -1 + 2^{(m+e)/2} & \text{se repite } 2^{m-e-1} + 2^{(m-e-2)/2} \text{ veces} \\ -1 & \text{se repite } 2^m - 2^{(m-e)} - 1 \text{ veces} \\ -1 - 2^{(m+e)/2} & \text{se repite } 2^{m-e-1} + 2^{(m-e-2)/2} \text{ veces} \end{cases} \quad (2.15)$$

Una vez se tiene la covarianza S_{ab} la secuencia numérica se obtiene con:

$$s_n = (S_{ab} + 1) 2^{-(m+e)/2} \quad (2.16)$$

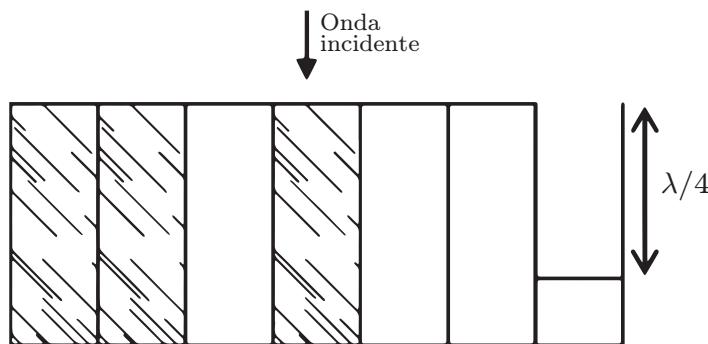


Figura 2.14: Difusor ternario basado en la secuencia $\{1,1,0,1,0,0,-1\}$. Figura extraída de T. Cox, Angus, y D'Antonio (2006).

2.4.5.2. Quadriphase

Este tipo de diseño es similar al ternario pero añadiendo una profundidad más, la secuencia ahora se conforma con los valores $-1, 0, 1$ y ξ , con ello se consigue mejorar la respuesta de los difusores ternarios en las frecuencias múltiplos pares de la frecuencia de diseño.

Este nuevo valor ξ sustituirá algunos valores -1 y 1 , nunca al 0 , y para ello se utilizan algoritmos de optimización que prueben cuál es la mejor distribución del nuevo valor.

Además de la profundidad $d_1 = \lambda_0/4$ que se aplica al valor -1 , la profundidad aplicada al valor ξ es menor que d_1 y se calcula como:

$$C_1 = \frac{1}{N}, \quad C_2 = \frac{N_i}{N_{i+1}}, \quad (2.17)$$

$$d_2 = d_1 C_x, \quad (2.18)$$

dónde N es cualquier número primo, N_i también es cualquier número primo, N_{i+1} es el siguiente número primo de N_i , C_x es uno de los dos cálculos de 2.17 y d_2 es la profundidad correspondiente a ξ .

Las frecuencias críticas de este diseño se encuentran en:

$$f_c = \frac{2f_0m}{C_x}, \quad (2.19)$$

dónde m es el orden de la secuencia MLS y se debe cumplir la condición de que m/C_x sea un número entero.

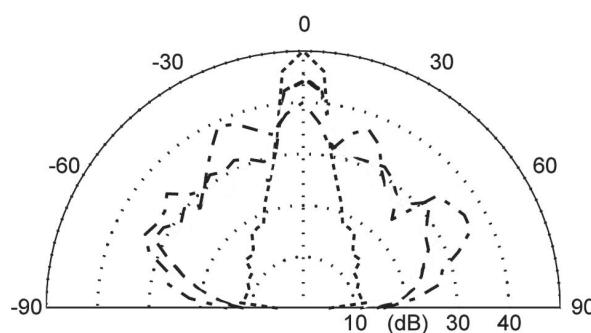


Figura 2.15: Comparación de la respuesta de difusores: - - -, ternario; - · - · -, cuadrifase, · · · · · -, panel plano. Figura extraída de T. Cox, Angus, y D'Antonio (2006).

2.4.6. Difusores volumétricos

Constituidos como tal por Angus y cols. (2008) y Hughes y cols. (2010), este tipo de difusores aprovechan el perfil de formas geométricas como semicilindros, semiesferas, pirámides y otras formas más complejas para conseguir una difusión relativamente uniforme. En el punto

siguiente, cristales de sonido, se analiza un caso particular de estos.

Los difusores volumétricos permiten, sin un gran espesor, trabajar en frecuencias menores a las habituales en difusores de Schroeder, en este caso la dimensión que influye en la difusión de las frecuencias cercanas a la de diseño es la superficie que cubre.

2.4.6.1. Pirámides y triángulos

También triángulos y cuñas, su difusión es fuertemente dependiente del ángulo formado entre la base y las paredes del triángulo, χ , tal como se puede ver en la figura 2.16.

Si el ángulo formado por χ es menor o igual a 30° produce 2 reflexiones predominantes en $\pm 2\chi$ (figura 2.17), consiguiendo un filtro notch en un rango de frecuencias más amplio que los difusores PRD pero solo en ángulos de incidencia alrededor de la normal. Si $30^\circ < \chi < 45^\circ$ se siguen produciendo dos reflexiones en $\pm 2\chi$ pero también otras dos en $\pm(180 - 4\chi)$. $\chi = 45^\circ$ es un ángulo crítico que produce la misma respuesta que un panel plano. Con $45^\circ < \chi < 54^\circ$ solo se producen dos reflexiones en $\pm(180 - 4\chi)$.

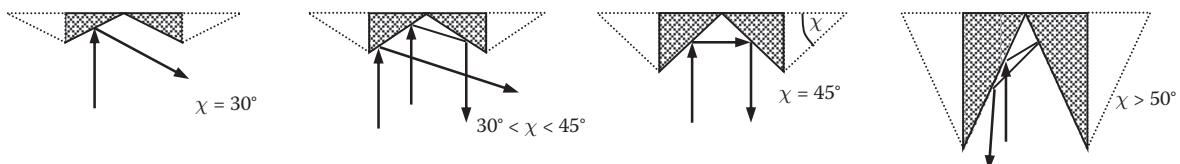


Figura 2.16: Trazado de rayos sobre parejas de triángulos. Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

Desde $\chi = 54^\circ$ en adelante aumenta considerablemente la reflexión interna de los rayos siendo necesario un análisis de trazado de rayos para conocer las direcciones de las reflexiones. Cuando $\chi > 85^\circ$ vuelve a suceder un comportamiento similar que en $\chi = 45^\circ$ pero con menor energía especular. Es importante señalar que a ángulos tan altos el comportamiento del campo entre los triángulos comienza a ser el mismo que un resonador produciendo absorción por efecto de este.

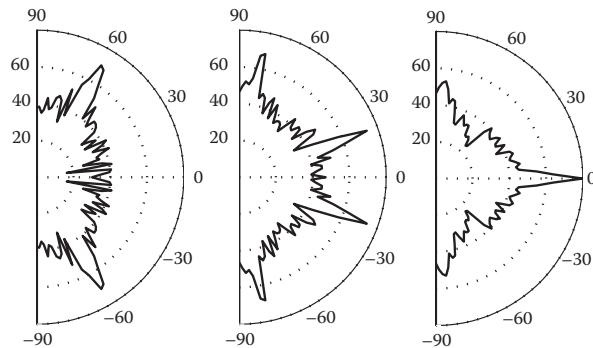


Figura 2.17: Difusión en la perpendicular de dos triángulos para tres ángulos: 30° , 40° y 45° . Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

2.4.6.2. Superficies convexas

Los semicilindros, semiesferas o superficies convexas, pueden parecer difusores óptimos cuando solo hay un elemento (figura 2.18) pero no es así, la distribución temporal es la misma que un panel plano (figura 2.19) por lo que se seguirían produciendo problemas de aleteo o de filtro de peine. Además, cuando hay un solo elemento, un semicilindro o una semiesfera, el comportamiento es similar a una fuente puntual pero para ello el tamaño necesario es excesivo, así que la solución pasa por un array de elementos más pequeños.

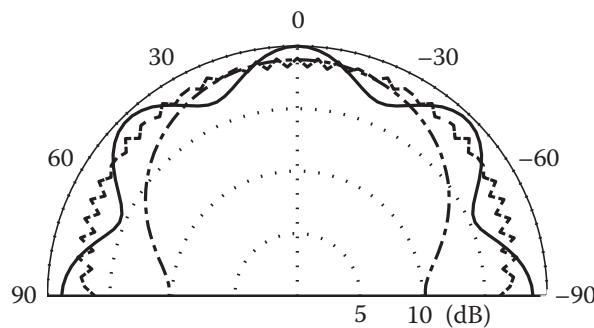


Figura 2.18: Difusión de un semicilindro de 1 metro de diámetro d para las frecuencias: - - - 40 Hz ($\lambda = 8.5d$); — 400 Hz ($\lambda = 0.85d$); - · - 4000 Hz ($\lambda = 0.085d$). Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

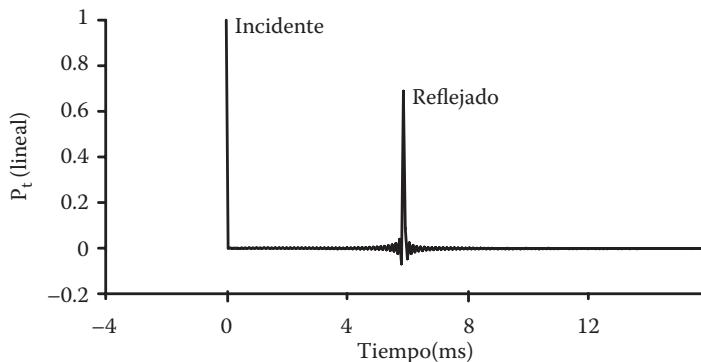


Figura 2.19: Presión incidente y reflejada por un semicilindro. Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

Configurando un array de elementos se mejora la difusión temporal, además se puede calcular fácilmente la respuesta de un difusor formado por múltiples elementos si se tiene la respuesta de uno de ellos tal que:

$$p_a(\Psi, \theta) = p_1(\Psi, \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left((\sin \Psi + \sin \theta) - \frac{m\lambda}{W} \right) \quad (2.20)$$

dónde Ψ es el ángulo de incidencia, θ es el ángulo de reflexión, p_a es la presión del array, p_1

es la presión de un solo elemento, m es el número de elementos en el array, λ es la longitud de onda, W es la distancia entre centros de los elementos y δ es la función delta.

Como se puede observar en la figura 2.20 la difusión temporal de un array de elementos mejora drásticamente en comparación con un solo elemento y por tanto siendo eficaz como difusor acústico. Si además se alterna el tamaño de los elementos se consigue una mejora en el patrón polar del difusor.

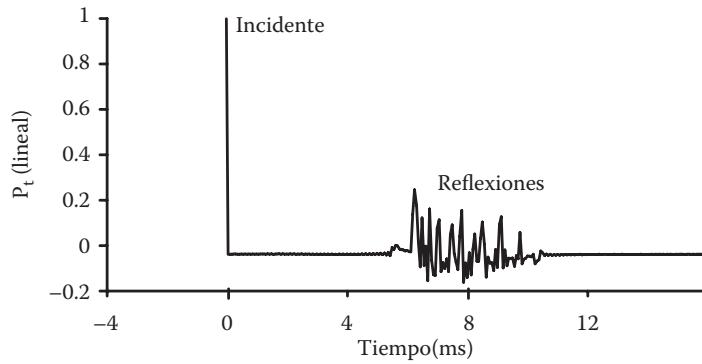


Figura 2.20: Presión incidente y reflejada por un array de semicilindros. Figura extraída de T. Cox y D'Antonio (2016).

2.4.7. Cristales de sonido

Los cristales de sonido o cristales fonónicos (*Phononic crystals*) han sido desarrollados inicialmente por Sánchez-Pérez y cols. (1998), y posteriormente han sido estudiados para su uso como difusores acústicos en Hughes y cols. (2010) y Redondo y cols. (2011).

Se denominan así debido al uso de cristales en el campo de la óptica para manipular la dirección y energía de los fotones. Los cristales son estructuras periódicas que debido a sus características interaccionan con ciertas longitudes de onda. En el campo de la acústica estos cristales están formados por cilindros y dependiendo de su distribución y los radios de los mismos producen absorción, difusión u otros efectos como guía de ondas (Miyashita, 2005).

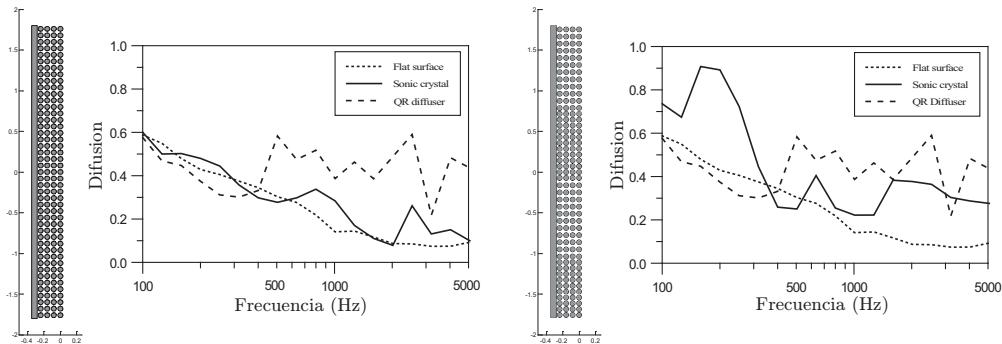


Figura 2.21: Difusores basados en cristales de sonido y sus coeficientes de difusión. Figuras extraídas de Redondo y cols. (2011).

En el ejemplo de la figura 2.21 se observan dos distribuciones diferentes de los cilindros. En el de la derecha los cilindros tienen un radio de 3.5 cm, distancia entre centros de 8 cm y un total de 4 columnas de cilindros por 40 filas. El de la izquierda es bi-periódico, es decir tiene 2 grupos diferentes de distancias verticales entre cilindros, la distancia entre columnas es la misma, 8 cm, pero entre filas se alterna, las 10 primeras tienen una distancia de 8.8 cm, las siguientes 10 de 7.2 cm y esto se repite con las 20 restantes. Ambos difusores tienen un espesor total de 32 cm. Como se puede observar, al introducir varias periodicidades se consiguen excelentes resultados en baja frecuencia que con los difusores de Schroeder es difícilmente alcanzable.

Este tipo de difusores aun se encuentran en investigación y por tanto no hay una teoría consolidada que permita predecir el comportamiento del difusor, solo es posible analizarlo a partir de métodos numéricos como el de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo o FDTD por sus siglas en inglés.

2.4.8. Metadifusores

Los metadifusores se basan en diseñar difusores utilizando el concepto de metamaterial. La definición de metamaterial es algo confusa en la literatura pero todas las definiciones concuerdan en que se trata de obtener un medio o material formado por varios componentes que en su conjunto tienen propiedades inusuales frente a las propiedades de estos componentes por separado. En general, los metamateriales son estructuras resonantes y su diseño permite trabajar en longitudes de onda inferiores a las de los diseños estándar, lo que en inglés se denomina *subwavelength*.

A continuación se exponen los detalles más relevantes en el caso de difusores con resonadores de Helmholtz. Este trabajo tratará de aplicar el mismo principio pero con resonadores de placa.

Este tipo de difusores contienen resonadores de Helmholtz dentro de las cavidades del difusor, permitiendo así reducir su tamaño. En Jiménez y cols. (2017) se realizó el diseño de varios difusores de este tipo, basándose en secuencias de residuo cuadrático, raíz primitiva y ternaria, se agregaron los resonadores y mediante el cálculo TMM (punto 3.1.2) y FEM se obtuvieron los resultados.

Los resultados mostrados en el trabajo son los obtenidos una vez realizada la optimización de la geometría tal como se explica en el punto 3.3.

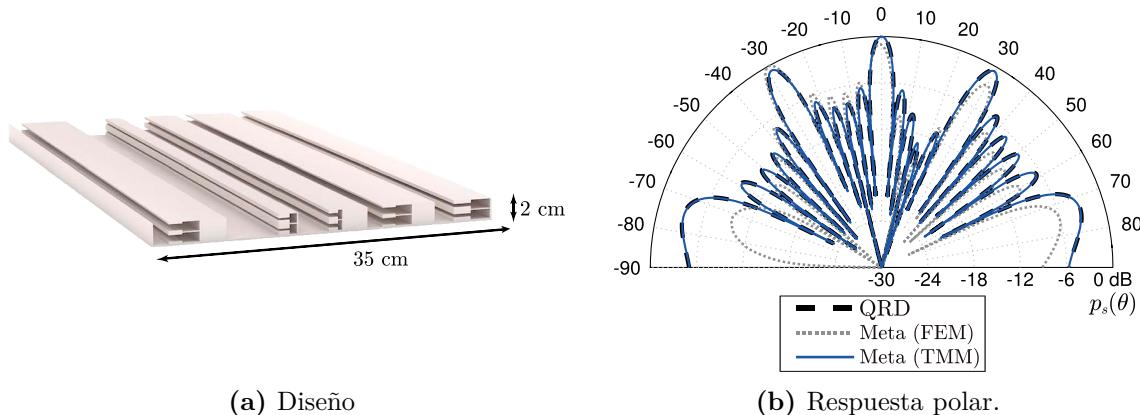


Figura 2.22: Diseño y respuesta de un QR-metadifusor 17 veces más fino que el diseño QRD. (Frecuencia de diseño de 500 Hz). Figura extraída de Jiménez y cols. (2017)

En la figura 2.22 se puede observar que con un metadifusor QR 17 veces mas fino que un QRD se obtiene el mismo resultado. En este caso la frecuencia de diseño es de 500 Hz y el análisis a 2000 Hz, el grosor del difusor en el caso del diseño QRD es de 34 cm y en el caso del metadifusor de 2 cm. En el resto de secuencias se obtienen resultados similares frente a sus diseños estándar tal como se puede ver en Jiménez y cols. (2017).

Estos diseños finalmente se estudiaron experimentalmente, fabricándolos mediante impresión 3D y los resultados obtenidos son muy similares a los estimados mediante el cálculo, estas validaciones del modelo teórico mediante experimentación pueden ser analizadas en el trabajo de Ballesteros y cols. (2019).

3. Métodos

Los métodos utilizados en este trabajo para desarrollar los difusores con resonadores de placa o membrana son: el cálculo teórico, con el que se define toda la matemática necesaria para realizar los modelos analíticos, el cálculo numérico, en concreto FEM (Finite Element Method), que será necesario para validar el modelo analítico y por último la optimización que se utilizará para mejorar los diseños de los difusores y obtener los mejores resultados en las frecuencias deseadas.

3.1. Cálculo teórico

Para realizar el cálculo teórico de la respuesta de un difusor se debe calcular en primer lugar la impedancia acústica de cada elemento del mismo, tanto de la cavidad como de la placa o membrana, para ello se deberán tener en cuenta las pérdidas viscotérmicas en las cavidades y viscoelásticas en las placas o membranas. Una vez se tienen estas impedancias es el momento de analizar el conjunto cavidad-placa, para ello se hará uso del método de la matriz de transferencia o TMM por sus siglas en inglés. A partir de esta matriz se pueden obtener los coeficientes de reflexión de cada conjunto cavidad-placa y con ellos es posible calcular la respuesta en campo lejano del difusor (zona de Fraunhofer) mediante una transformada de Fourier bidimensional de la distribución espacial de coeficientes de reflexión.

A continuación se describen todos los cálculos necesarios para obtener los parámetros descritos.

3.1.1. Impedancia acústica de los resonadores

3.1.1.1. Resonadores de cuarto de longitud de onda (QWR)

Un resonador de cuarto de longitud de onda es un tubo en el que su longitud es la cuarta parte de la longitud de onda a la que resuena (figura 3.3).

La impedancia acústica característica de un medio se calcula como:

$$Z = \rho c = \sqrt{\rho K}, \quad (3.1)$$

dónde ρ es la densidad del medio contenido en la cavidad en kg/m^3 , c la velocidad de propagación del sonido en ese medio en m/s y K es el módulo de Bulk.

Para el caso de un resonador de cuarto de longitud de onda (QWR) es necesario tener en cuenta la superficie de la sección de la cavidad:

$$Z' = \frac{Z}{S}, \quad (3.2)$$

dónde S es el área de la sección de la cavidad.

3.1.1.2. Membranas o placas elásticas



Figura 3.1: Placas o membranas.

Placa circular

Considerando solo los modos axisimétricos el cálculo analítico para obtener la impedancia acústica de una placa circular fija en su contorno es:

$$Z_p(\omega) = -\frac{i\omega\rho h}{S} \frac{J_0(k_m r)I_1(k_m r) + J_1(k_m r)I_0(k_m r)}{J_2(k_m r)I_1(k_m r) - J_1(k_m r)I_2(k_m r)}, \quad (3.3)$$

dónde k_m es el número de onda en la placa y r es el radio de la placa en metros.

$$k_m = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_p}}}, \quad D_p = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3.4)$$

dónde h es el espesor de la placa en metros, ρ es la densidad en kg/m^3 , E es el módulo de Young en pascales, ν es el coeficiente de Poisson y D_p es la rigidez a la flexión.

Placa cuadrada

Modelo completo

Desarrollado por Sung y Jan (1997), este cálculo permite obtener la impedancia de una placa cuadrada para cualquier modo de vibración m, n .

$$Z_p(\omega) = \left[i\omega \int_0^a \int_0^a \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^a X_m(x) Y_n(y) dx dy}{D(I_1 I_2 + 2I_3 I_4 + I_5 I_6) - \rho h \omega^2 I_2 I_6} \right) dx dy \right]^{-1}, \quad (3.5)$$

dónde $X_m(x)$ y $Y_n(y)$ son las funciones:

$$X_m(x) = G\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \frac{G(\lambda_m)}{H(\lambda_m)} H\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right), \quad (3.6)$$

$$Y_n(y) = G\left(\frac{\lambda_n y}{a}\right) - \frac{G(\lambda_n)}{H(\lambda_n)} H\left(\frac{\lambda_n y}{a}\right), \quad (3.7)$$

dónde $G(u) = \cosh(u) - \cos(u)$, $H(u) = \sinh(u) - \sin(u)$, y λ_m y λ_n deben cumplir la condición $\cosh(\lambda) \cos(\lambda) = 1$. La funciones I_x son:

$$I_1 = \int_0^a X_m(x) \frac{\partial^4 X_m(x)}{\partial x^4} dx, \quad I_2 = \int_0^a Y_n^2(y) dy, \quad (3.8)$$

$$I_3 = \int_0^a X_m(x) \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} dx, \quad I_4 = \int_0^a Y_n(y) \frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2} dy, \quad (3.9)$$

$$I_5 = \int_0^a Y_n(y) \frac{\partial^4 Y_n(y)}{\partial y^4} dy, \quad I_6 = \int_0^a X_m^2(x) dx. \quad (3.10)$$

Las frecuencias de resonancia se obtienen con:

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{D_p(I_1 I_2 + 2I_3 I_4 + I_5 I_6)}{\rho h I_2 I_6}}, \quad (3.11)$$

dónde D_p es la rigidez a la flexión calculada del mismo modo que en la ecuación 3.4, ρ es la densidad de la placa en kg/m^3 y h es el espesor de la misma en metros.

Modelo aproximado

En el caso de la placa cuadrada es posible simplificar el cálculo mediante aproximación únicamente válido en las frecuencias alrededor de la primera frecuencia de resonancia:

$$Z_p(\omega) = \frac{1}{i\omega C_p} + i\omega M_p, \quad (3.12)$$

dónde C_p y M_p son la compliancia y la masa acústica calculadas como:

$$C_p = 3.73 \cdot 10^{-4} \frac{a^6}{D_p}, \quad M_p = 2.06 \frac{\rho h}{a^2}, \quad (3.13)$$

dónde a es el tamaño de lado del cuadrado en metros y D_p es la rigidez a la flexión calculada como en la ecuación 3.4, ρ es la densidad de la placa en kg/m^3 y h es el espesor de la misma en metros.

La frecuencia de resonancia de la placa cuadrada se obtiene con $\omega_p = \sqrt{1/(M_p C_p)}$.

Membrana cuadrada

En el caso de utilizar una membrana se debe tener en cuenta la tensión aplicada a la misma por lo que los cálculos son diferentes a los anteriores.

Modelo completo

El cálculo completo tanto de la impedancia como de las frecuencias de resonancia para una membrana cuadrada:

$$Z_{\text{mem}} = \left[i\omega a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]^2 [1 - (-1)^n]^2}{\rho h (\omega_{m,n}^2 - \omega^2) m^2 n^2 \pi^4} \right]^{-1}, \quad (3.14)$$

dónde ω es la frecuencia angular para la cual se calcula la impedancia, a es el tamaño de lado de la membrana, h es el espesor de la membrana, ρ es la densidad de la membrana y $\omega_{m,n}$ es la frecuencia de resonancia en el modo (m, n) calculada como:

$$\omega_{m,n} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{\rho} (m^2 + n^2)}, \quad (3.15)$$

dónde T es la tensión aplicada a la membrana.

Se debe tener en consideración que en la práctica la tensión sufre muchas variaciones haciendo que este cálculo sea comparable con una membrana real solo en los primeros instantes y siempre que la tensión se aplique del mismo modo en todas direcciones.

Modelo aproximado

Este cálculo es aproximado, al igual que el de una placa cuadrada, y solo es válido para las frecuencias alrededor de la primera resonancia.

$$Z_{\text{mem}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_{\text{mem}}} + i\omega M_{\text{mem}}, \quad (3.16)$$

dónde C_{mem} y M_{mem} son la compliencia y la masa acústica calculadas como:

$$C_{\text{mem}} = 0.035 \frac{a^4}{T}, \quad M_{\text{mem}} = 1.44 \frac{\rho h}{a^2}, \quad (3.17)$$

dónde a es el tamaño de lado del cuadrado en metros, ρ es la densidad de la membrana en kg/m^3 y h es el espesor de la misma en metros.

La frecuencia de resonancia de la membrana cuadrada se obtiene con $w_{\text{mem}} = \sqrt{1/(M_{\text{mem}} C_{\text{mem}})}$. Este cálculo solo es válido cuando la tensión es mucho mayor que la rigidez a la flexión, $T \gg Eh^3/12(1 - \nu^2)$.

3.1.2. Método de la matriz de transferencia

Este método permite realizar los cálculos de una forma *modular*, donde se van integrando las diferentes capas para conocer el comportamiento de, por ejemplo, un difusor acústico con placa donde la cavidad es una capa y la placa otra.

Inicialmente se obtienen las relaciones de las magnitudes acústicas en diferentes posiciones de un material asumiendo solo ondas planas longitudinales, tal como se puede ver en la figura 3.2. Por medio de la ecuación de Euler (conservación de momento) y tomando el campo acústico total como la superposición de dos ondas, se puede calcular la presión y la velocidad de partícula en un punto dado:

$$p(x) = P_A e^{-ikx} + P_B e^{ikx}, \quad (3.18)$$

$$v_x(x) = \frac{P_A}{Z} e^{-ikx} - \frac{P_B}{Z} e^{ikx}, \quad (3.19)$$

dónde Z es la impedancia acústica específica, k es el número de onda y P_A y P_B son las amplitudes de las dos ondas.

Para obtener las amplitudes de las dos ondas se define la presión y la velocidad de partículas en ambos extremos del conjunto, primero en $x = 0$ y después en $x = L$:

$$p(x)|_{x=0} = P_A + P_B, \quad (3.20)$$

$$Z v_x(x)|_{x=0} = P_A - P_B. \quad (3.21)$$

Para $x = L$ y teniendo en cuenta la relación de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$):

$$p(x)|_{x=L} = (P_A + P_B) \cos(kL) - i(P_A - P_B) \sin(kL), \quad (3.22)$$

$$v_x(x)|_{x=L} = \frac{P_A - P_B}{Z} \cos(kL) - i \frac{P_A - P_B}{Z} \sin(kL). \quad (3.23)$$

Combinando las ecuaciones 3.20 y 3.21 en las ecuaciones 3.22 y 3.23:

$$p(x)|_{x=L} = \cos(kL) p(x)|_{x=0} - iZ \sin(kL) v_x(x)|_{x=0}, \quad (3.24)$$

$$v_x(x)|_{x=L} = \cos(kL) v_x(x)|_{x=0} - i \frac{1}{Z} \sin(kL) p(x)|_{x=0}. \quad (3.25)$$

Ahora se tienen las condiciones para expresar las ecuaciones en forma matricial, que invirtiendo la matriz, queda:

$$\begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} \cos(kL) & iZ \sin(kL) \\ i \sin(kL)/Z & \cos(kL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=L}. \quad (3.26)$$

Obteniendo así una matriz de propagación que permite calcular los valores de presión y velocidad de partícula para cualquier valor de L .

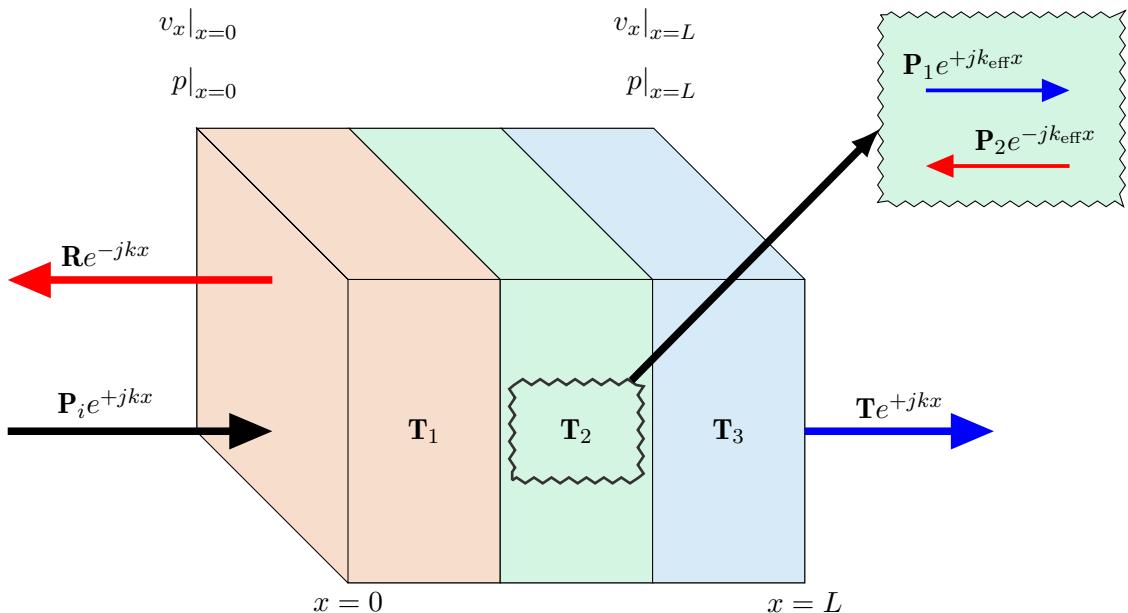


Figura 3.2: Estructura y detalle de un bloque del método de la matriz de transferencia \mathbf{T} .

3.1.2.1. Matriz de transferencia total

Para una estructura que puede estar compuesta de varias subestructuras (figura 3.2) se define la matriz de transferencia total. Esta matriz relaciona la presión p y la velocidad de partícula v_x en el inicio de la estructura, $x = 0$, y en el final de la misma, $x = L$, quedando el sistema definido como:

$$\begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=L}. \quad (3.27)$$

Por lo que compactando las ecuaciones, una estructura formada por N subestructuras diferentes tendrá una matriz de transferencia total:

$$\mathbf{T} = \prod_{n=1}^N \mathbf{T}_n, \quad (3.28)$$

dónde \mathbf{T}_n son las matrices de cada una de las subestructuras, todas ellas con la forma de la ecuación 3.26.

3.1.2.2. Parámetros de la matriz de transferencia total

Una vez se tiene caracterizado un sistema con la matriz de transferencia total, \mathbf{T} , se pueden obtener los parámetros acústicos del sistema completo.

3.1.2.2.1. Número de onda

Como se puede observar en la ecuación 3.26, el número de onda se despeja de la misma tal que:

$$k = \frac{1}{L} \cos^{-1} \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2} \right). \quad (3.29)$$

3.1.2.2.2. Impedancia acústica característica

Del mismo modo se puede extraer la impedancia acústica característica de la ecuación 3.26 como:

$$Z = \sqrt{\frac{T_{12}}{T_{21}}}. \quad (3.30)$$

3.1.2.2.3. Densidad y módulo de Bulk

La densidad y el módulo de Bulk se obtienen con:

$$K(\omega) = Z \frac{\omega}{k}, \quad \rho(\omega) = Z \frac{k}{\omega}, \quad (3.31)$$

dónde Z y k son los obtenidos en los dos puntos anteriores.

3.1.2.2.4. Impedancia acústica específica

La impedancia acústica característica y la específica son iguales cuando el medio es homogéneo y se propaga por él una onda plana, en este caso tenemos caracterizado un sistema no homogéneo y por tanto la impedancia específica difiere de la característica.

La impedancia acústica específica se puede obtener a partir de la impedancia del medio, Z_0 , y el coeficiente de reflexión (punto 3.1.4) asumiendo que no existe transmisión:

$$Z' = Z_0 \left(\frac{1 - R}{1 + R} \right). \quad (3.32)$$

3.1.3. Pérdidas viscotérmicas en las cavidades y viscoelásticas en las placas y membranas

Cuando un frente de ondas interactúa con un medio contenido dentro de determinadas geometrías se alteran las características del medio siendo estas dependientes de la frecuencia y la forma del continente. Estas alteraciones son las pérdidas viscotérmicas y viscoelásticas, que con ellas se corrijen los parámetros originales y reales del medio para obtener los valores complejos y dependientes de la frecuencia y la geometría.

Los parámetros que tienen en cuenta las pérdidas pasarán a llamarse parámetros efectivos.

3.1.3.1. Cavidades

3.1.3.1.1. Densidad y módulo de Bulk efectivos

El cálculo tanto de la densidad como del módulo de Bulk efectivos para distintas formas de cavidad ha sido desarrollado por Stinson (1991) basándose en los trabajos de Kirchhoff (1868) y Rayleigh (1894).

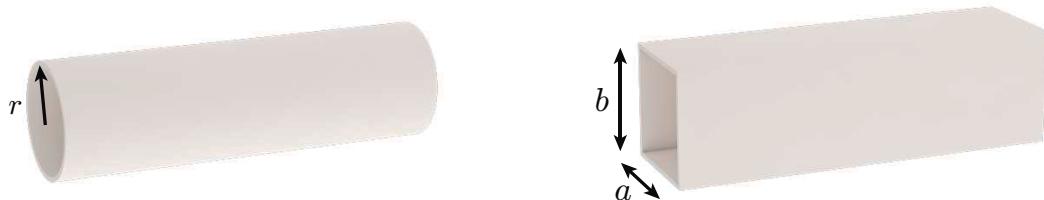


Figura 3.3: Cavidades circular y rectangular.

Cavidad con sección circular

$$\rho_{\text{eff}}(\omega) = \rho_0 \left[1 - \frac{2J_1(rG_\rho(\omega))}{rG_\rho(\omega)J_0(rG_\rho(\omega))} \right]^{-1}, \quad (3.33)$$

$$K_{\text{eff}}(\omega) = K_0 \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2J_1(rG_K(\omega))}{rG_K(\omega)J_0(rG_K(\omega))} \right]^{-1}, \quad (3.34)$$

dónde ρ_0 es la densidad del medio en kg/m^3 , K_0 es el módulo de Bulk del medio en Pascales, J_n es el n-ésimo orden de la función de Bessel, γ es la relación de los calores específicos del medio (calor específico a presión constante entre calor específico a volumen constante), ω es la frecuencia angular y los parámetros G_ρ y G_K son:

$$G_\rho(\omega) = \sqrt{\frac{i\omega}{v}}, \quad G_K(\omega) = \sqrt{\frac{i\omega}{v'}}, \quad (3.35)$$

dónde $v = \mu/\rho_0$ es la viscosidad cinemática en m^2/s , μ es la viscosidad dinámica en $\text{Pa} \cdot \text{s}$, $v' = \mu/(P_r\rho_0)$ y $P_r = C_p\mu/\kappa$ es el número de Prandtl.

Cavidad con sección rectangular

$$\rho_{\text{eff}}(\omega) = \rho_0 \frac{\rho_0 a^2 b^2}{4G_\rho^2(\omega) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_m^2 \beta_n^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2 + G_\rho^2(\omega))]^{-1}}, \quad (3.36)$$

$$K_{\text{eff}}(\omega) = K_0 \frac{1}{\gamma - \frac{4G_K^2(\omega)(\gamma-1)}{a^2 b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_m^2 \beta_n^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2 + G_K^2(\omega))]}, \quad (3.37)$$

dónde ρ_0 es la densidad del medio en kg/m^3 , ω es la frecuencia angular, P_0 es la presión atmosférica en Pascales, γ es la relación de los calores específicos del medio (calor específico a presión constante entre calor específico a volumen constante), $a = l_x/2$ y $b = l_y/2$ siendo l_x y l_y las dimensiones del rectángulo en metros y los parámetros α_m y β_n son:

$$\alpha_m = (m + 1/2)\pi/a, \quad \beta_n = (n + 1/2)\pi/b, \quad (3.38)$$

dónde m y n son números enteros ($0, 1, 2, \dots, \infty$) siendo estos los puntos de integración: a mayor valor, mayor precisión en el cálculo.

3.1.3.1.2. Número de onda efectivo

El número de onda efectivo se obtiene a partir de la velocidad de propagación y esta a partir de los parámetros efectivos calculados anteriormente como:

$$k_{\text{eff}}(\omega) = \frac{\omega}{c_{\text{eff}}(\omega)}, \quad c_{\text{eff}}(\omega) = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}(\omega)}{\rho_{\text{eff}}(\omega)}}. \quad (3.39)$$

3.1.3.1.3. Impedancia acústica característica efectiva

La impedancia acústica característica efectiva debe obtenerse mediante los parámetros efectivos ya

calculados quedando del siguiente modo:

$$Z_{\text{eff}}(\omega) = \sqrt{\rho_{\text{eff}}(\omega)K_{\text{eff}}(\omega)}. \quad (3.40)$$

Para el caso de un resonador de cuarto de longitud de onda (QWR) se debe tener en cuenta la superficie de la sección de la cavidad:

$$Z'_{\text{eff}}(\omega) = \frac{Z_{\text{eff}}(\omega)}{S}, \quad (3.41)$$

dónde S es la superficie de la sección de la cavidad en m^2 .

3.1.3.1.4. Forma matricial

Para utilizar estos parámetros en el método de la matriz de transferencia se da forma matricial a la respuesta de una cavidad, a partir de la ecuación 3.26, tal que:

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \cos(k_{\text{eff}}L) & iZ'_{\text{eff}} \sin(k_{\text{eff}}L) \\ i \sin(k_{\text{eff}}L)/Z'_{\text{eff}} & \cos(k_{\text{eff}}L) \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

3.1.3.2. Placas o membranas elásticas

3.1.3.2.1. Densidad y módulo de Young efectivos

La densidad y el módulo de Young sufren variaciones frente a la frecuencia, estas variaciones son complejas y tendrán efecto en la fase y por tanto, finalmente, en el coeficiente de reflexión. El cálculo a partir de los valores reales es el siguiente:

$$E_{\text{eff}} = E_0 + i\omega\eta_E, \quad (3.43)$$

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 - \frac{i\eta_\rho}{\sqrt{\omega}}, \quad (3.44)$$

dónde η_E es el factor de pérdidas del módulo de Young de la membrana o placa y η_ρ es el factor de pérdidas de la densidad de la membrana o placa.

3.1.3.2.2. Impedancia acústica característica efectiva

El cálculo de la impedancia característica efectiva de una placa o membrana es el definido en el punto 3.1.1.2 utilizando los valores de densidad y módulo de Young efectivos calculados en el punto anterior.

3.1.3.2.3. Forma matricial

Debido a que la placa o membrana es un elemento resonante en serie, es decir, tiene el mismo medio a ambos lados, la matriz se simplifica.

Teniendo en cuenta que la velocidad de partícula es la misma en ambos lados de la placa o membrana la impedancia del resonador será:

$$Z_m = \frac{p(x)|_{x=0} - p(x)|_{x=h}}{v(x)|_{x=h}}. \quad (3.45)$$

Por tanto, las ecuaciones que relacionan presión y velocidad:

$$p(x)|_{x=0} = p(x)|_{x=h} + Z_m v(x)|_{x=h}, \quad (3.46)$$

$$v(x)|_{x=0} = v(x)|_{x=h}. \quad (3.47)$$

Finalmente, la forma matricial para el caso de un resonador de placa o membrana es:

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & Z_m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

3.1.4. Cálculo del coeficiente de reflexión

Cuando se tiene una cavidad con el extremo final rígido la velocidad de partícula en ese punto es 0 ($v_x(x)|_{x=L} = 0$), por lo que utilizando la ecuación 3.27:

$$p(x)|_{x=0} = T_{11} p(x)|_{x=L}, \quad (3.49)$$

$$v_x(x)|_{x=0} = T_{21} p(x)|_{x=L}. \quad (3.50)$$

El coeficiente de reflexión está relacionado con la presión y la velocidad en $x = 0$ como:

$$p(x)|_{x=0} = 1 + R, \quad (3.51)$$

$$v_x(x)|_{x=0} = \frac{1 - R}{Z_{\text{eff}}}, \quad (3.52)$$

dónde Z_{eff} es la impedancia acústica característica efectiva de la cavidad en Rayls o Pa·s/m.

Combinando las ecuaciones 3.49 y 3.50 con 3.51 y 3.52:

$$T_{11} p(x)|_{x=L} = 1 + R \quad \rightarrow \quad p(x)|_{x=L} = \frac{1 + R}{T_{11}},$$

$$T_{21} \frac{1 + R}{T_{11}} = \frac{1 - R}{Z_{\text{eff}}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_{21} Z_{\text{eff}}}{T_{11}} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

Por lo que despejando, el coeficiente de reflexión es:

$$R = \frac{T_{11} - T_{21}Z_{\text{eff}}}{T_{11} + T_{21}Z_{\text{eff}}} \quad (3.53)$$

El coeficiente de absorción se relaciona con el coeficiente de reflexión (cuando no existe transmisión) como:

$$\alpha = 1 - |R|^2 \quad (3.54)$$

3.1.5. Cálculo del scattering polar en campo lejano

Para obtener la respuesta de un difusor en campo lejano debemos ubicarnos en la zona de Fraunhofer, $r \rightarrow \infty$. Para ello, teniendo el coeficiente de reflexión se realiza la integración del campo lejano tal que:

$$p_s(\theta, \phi) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} R(x, y) e^{ik(x \sin \phi \sin \theta + y \sin \phi \cos \theta)} dx dy, \quad (3.55)$$

dónde a y b son los tamaños de lado del difusor completo, θ el ángulo azimutal, ϕ el ángulo de elevación, k es el número de onda y $R(x, y)$ es el coeficiente de reflexión en la posición x, y del difusor.

Como se puede observar, el cálculo es equivalente a una transformada de Fourier discreta bidimensional de la matriz de coeficientes de reflexión R .

3.1.6. Cálculo de los parámetros de difusión y scattering

El cálculo de la difusión y el scattering a partir de medidas experimentales se debe realizar siguiendo la metodología y operaciones definidas en las normas:

- **Difusión:** ISO 17497-2:2012 - *Sound-scattering properties of surfaces – Part 2: Measurement of the directional diffusion coefficient in a free field.*
- **Scattering:** ISO 17497-1:2004 - *Sound-scattering properties of surfaces – Part 1: Measurement of the random-incidence scattering coefficient in a reverberation room.*

En el caso del scattering, la norma se aplica en medidas en campo reverberante, cuando se tienen medidas o cálculos en campo libre, como en este trabajo, se debe utilizar el cálculo definido por Mommertz (2000).

A continuación se resumen los cálculos necesarios para obtener los coeficientes, para más detalles se recomienda la consulta de las normas y el trabajo de Mommertz.

3.1.6.1. Coeficiente de difusión

El cálculo del coeficiente de difusión se puede realizar de dos modos dependiendo de si los puntos de medida se han posicionado en un único plano a lo largo de un semicírculo (un solo

ángulo de elevación) o mediante una semiesfera (múltiples ángulos de elevación y azimuth), en este último caso se debe realizar una corrección de área debido a que la superficie del difusor vista por el receptor varía en cada punto.

Cálculo para medidas sobre un plano

$$d_\theta = \frac{\left(\sum_{i=1}^n 10^{L_i/10} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(10^{L_i/10} \right)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n \left(10^{L_i/10} \right)^2}, \quad (3.56)$$

dónde L_i es el nivel de presión en el punto de medida i-ésimo y n es el número de puntos de medida.

Cálculo para medidas sobre una semiesfera

$$d_\theta = \frac{\left(\sum_{i=1}^n 10^{L_i/10} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(10^{L_i/10} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (N_i) - 1 \right) \sum_{i=1}^n \left(10^{L_i/10} \right)^2}, \quad (3.57)$$

dónde L_i es el nivel de presión en el punto de medida i-ésimo y N_i es el factor de corrección de área para el punto de medida i-ésimo:

$$A_i = \frac{4\pi}{\Delta\phi} \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{4} \right), \quad \theta = 0^\circ, \quad (3.58)$$

$$A_i = 2 \sin(\theta) \sin \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right), \quad \theta \neq 0^\circ, |\theta| \neq 90^\circ, \quad (3.59)$$

$$A_i = \sin \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right), \quad |\theta| = 90^\circ, \quad (3.60)$$

$$N_i = \frac{A_i}{A_{min}}, \quad (3.61)$$

dónde $\Delta\phi$ (azimuth) y $\Delta\theta$ (elevación) son los incrementos de ángulo entre cada punto de medida, θ es el ángulo de elevación del punto i-ésimo y A_{min} es el valor mínimo obtenido del cálculo completo desde $\theta = 0^\circ$ hasta $|\theta| = 90^\circ$.

Coefficiente normalizado

El valor del coeficiente de difusión de un difusor debe normalizarse para que finalmente se obtenga valor igual a 1 donde produzca mayor difusión y 0 donde no la produzca. Esto se realiza obteniendo el coeficiente de difusión de un panel plano de las mismas dimensiones del difusor y operando tal que:

$$d_{\theta,n} = \frac{d_{\theta} - d_{\theta,r}}{1 - d_{\theta,r}}, \quad (3.62)$$

dónde $d_{\theta,r}$ es el coeficiente de difusión de un panel plano (referencia).

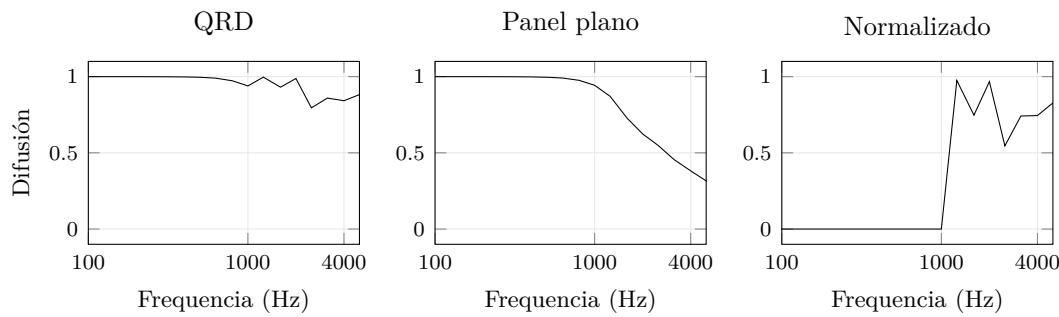


Figura 3.4: De izquierda a derecha: a) Coeficiente de difusión de un periodo de QRD con $N = 7$ y frecuencia de diseño de 1000 Hz; b) Coeficiente de difusión de un panel plano de las mismas dimensiones que el QRD (24 cm de lado); c) Coeficiente de difusión normalizado del QRD.

3.1.6.2. Coeficiente de correlación del scattering

Como se ha comentado al inicio, el cálculo del coeficiente de correlación del scattering se realiza tal como lo define Mommertz (2000).

Cálculo para medidas sobre un plano

$$\delta = 1 - \frac{\left| \sum_{i=1}^n p_1(\theta_i) p_0^*(\theta_i) \right|^2}{\sum_{i=1}^n |p_1(\theta_i)|^2 \sum_{i=1}^n |p_0(\theta_i)|^2}, \quad (3.63)$$

dónde p_1 es la presión reflejada por el difusor, p_0 la presión reflejada por un panel plano, el * indica que es el conjugado complejo, n es el número de puntos de medida y θ_i es el ángulo de elevación del punto de medida i-ésimo.

Cálculo para medidas sobre una semiesfera

$$\delta = 1 - \frac{\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_1(\theta_i, \phi_j) p_0^*(\theta_i, \phi_j) \right|^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |p_1(\theta_i, \phi_j)|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |p_0(\theta_i, \phi_j)|^2}, \quad (3.64)$$

dónde p_1 es la presión reflejada por el difusor, p_0 la presión reflejada por un panel plano, el * indica que es el conjugado complejo, n es el número de puntos de medida en elevación, m es el número de puntos de medida en azimuth, θ_i es el ángulo de elevación del punto de medida i-ésimo y ϕ_j es el ángulo de azimuth del punto de medida j-ésimo.

3.1.7. Diseño QRD de fracción de longitud de onda (subwavelength)

El diseño de fracción de longitud de onda permite aprovechar una de las virtudes de los metadifusores, menores tamaños no implican eficiencias menores en las frecuencias deseadas, tal como se ha visto en el ejemplo del punto 2.4.8.

El diseño QRD estándar (2.4.1) puede ser modificado para poder trabajar con dimensiones menores a $\lambda/2$.

En primer lugar se obtiene la secuencia numérica normalizada (0,1):

$$s_{n_{\text{norm}}} = \frac{(n^2 N)}{N - 1}, \quad s_{n,m_{\text{norm}}} = \frac{((n^2 + m^2) N)}{N - 1}. \quad (3.65)$$

0.33	0.66	0.16	0.16	0.66	0.33
------	------	------	------	------	------

Figura 3.5: Un periodo unidimensional de la secuencia QRD de fracción de longitud de onda con $N = 7$.

A continuación se obtiene la profundidad máxima y esta se multiplica por la secuencia numérica normalizada para obtener las profundidades de las cavidades.

$$d_{\max} = \frac{\lambda_{\text{ini}}}{N_\lambda}, \quad (3.66)$$

$$d_n = s_{n_{\text{norm}}} d_{\max}, \quad d_{n,m} = s_{n,m_{\text{norm}}} d_{\max}, \quad (3.67)$$

dónde λ_{ini} es la longitud onda inicial del diseño y N_λ es la fracción de la longitud de onda (2,3,4,...).

0.38	0.76	0.19	0	0.19	0.76	0.38
------	------	------	---	------	------	------

Figura 3.6: Profundidades en centímetros de un QRD unidimensional de fracción de longitud de onda con $N = 7$, $N_\lambda = 30$ y una frecuencia inicial de 1000 Hz.

El tamaño final del difusor completo puede definirse inicialmente y por tanto las dimensiones de las cavidades dependen de ese tamaño tal que:

$$w = \frac{W}{Nn_{\text{rep}}}, \quad (3.68)$$

dónde W es el ancho total del difusor en metros y n_{rep} es el número de periodos de la secuencia.

3.2. Cálculo numérico

Para el cálculo de problemas físicos que dependen del tiempo y el espacio es necesario utilizar ecuaciones en derivadas parciales o EDP, generalmente este tipo de ecuaciones no son resolubles con métodos analíticos por lo que se recurre a los métodos numéricos. Los métodos numéricos discretizan el problema y resuelven a base de aproximaciones la solución real de las EDP. El método de los elementos finitos, MEF o FEM en inglés, se utiliza para realizar esas aproximaciones. Aquí no se va a explicar toda la problemática y los detalles del método numérico, para profundizar en ello se recomienda el trabajo realizado por Zuazua (2009).

El método de los elementos finitos, como ya se ha comentado, resuelve las EDP mediante aproximaciones, para el ejemplo mas simple (una dimensión) esto se expresa matemáticamente como:

$$u \approx u_h, \quad u_h = \sum_i u_i x_i, \quad (3.69)$$

dónde u es la solución exacta, u_h la solución aproximada, u_i es el coeficiente de un punto i-ésimo y x_i el valor básico del punto i-ésimo.

Como se puede observar (figura 3.7), a mayor discretización mayor aproximación a la solución real pero aumenta el número de operaciones. Es posible aumentar esa discretización solo en ciertos rangos de interés para no aumentar los puntos de calculo globalmente. Esta discretización se denomina mallado de puntos y es el que define en que puntos de una curva, superficie o volumen se deben realizar los cálculos.

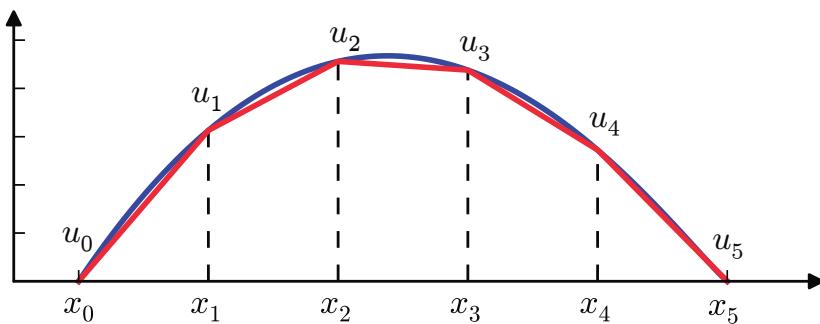


Figura 3.7: Función $u(x)$ discretizada mediante FEM.

Estos cálculos se vuelven más complejos a medida que aumentan las dimensiones y aumentan cuanto más puntos discretos se desean obtener, es por ello que el método de los elementos finitos es inabordable si no se utiliza un ordenador y programas dedicados a este cometido. En este trabajo se ha utilizado COMSOL Multiphysics[®] para realizar el cálculo numérico.

3.2.1. Herramienta COMSOL[®]

Para realizar el modelo con COMSOL[®], ademas de definir las geometrías es necesario seleccionar las características acústicas y las mecánicas (placas o membranas y cavidades).

Características acústicas Para definir las características acústicas se debe utilizar el módulo de presión acústica con la interfaz para el dominio en frecuencia. Dentro de este módulo se debe configurar el campo de presión acústica de fondo, que define la onda plana que incidirá sobre la geometría perpendicularmente. También se deben definir el resto de características de presión (presión ambiental) y del medio (aire).

Características mecánicas En este caso el módulo necesario es el de mecánica de estructuras. Para la placas se definen los parámetros viscoelásticos del material y en el caso de las paredes de las cavidades estos parámetros se definen idealmente rígidos.

Multifísica Para la interacción de la aeroacústica y la vibroacústica es necesario incluir un módulo de multifísica que combine las características viscotérmicas del medio y las viscoelásticas de las placas.

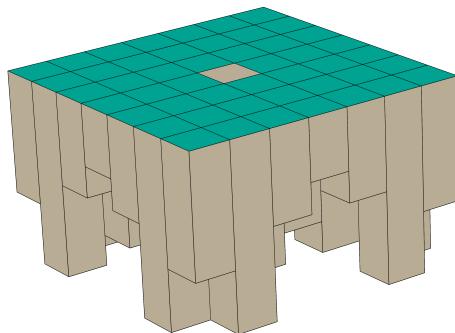


Figura 3.8: Modelo QRD con placas realizado con FEM en COMSOL®.

3.3. Optimización

La optimización de un diseño permite, a partir de unos parámetros iniciales, obtener los mejores resultados para un objetivo definido. Definiendo los requisitos (frecuencias en las que se busca obtener la máxima difusión) y mediante algoritmos de optimización se puede obtener el mejor diseño dentro de los márgenes definidos. La optimización se puede realizar mediante un algoritmo de optimización, valga la redundancia, que a rasgos generales se puede simplificar como el diagrama de la figura 3.9.

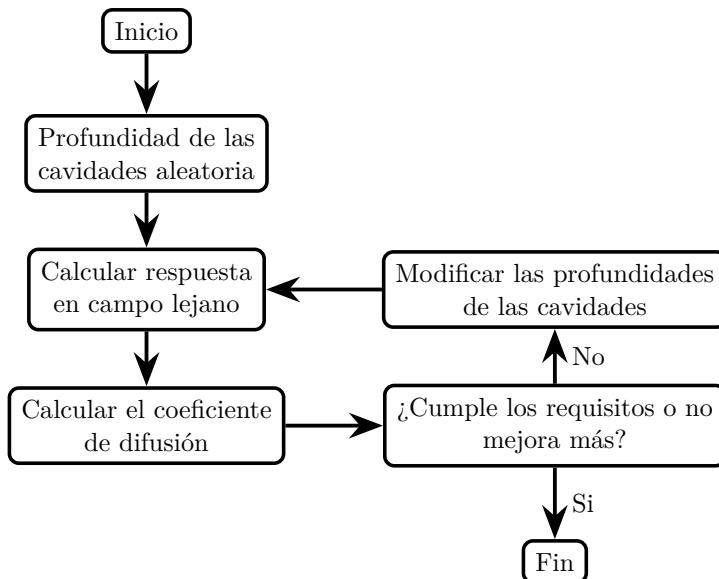


Figura 3.9: Diagrama de flujo para optimizar un difusor de Schroeder.

En el diagrama 3.9 se puede aumentar la complejidad para obtener, en ocasiones, mejores resultados cambiando no solo las profundidades sino también los espesores de placa y el tamaño de lado de las cavidades.

Para la optimización, en este trabajo, se trata de minimizar la función de coste u objetivo: $f(\omega_i) = 1 - d_i$, donde d_i es el coeficiente de difusión para la frecuencia i-ésima, cuando solo se

busca la optimización para una frecuencia esta optimización se denomina de objetivo único y si se realiza para múltiples frecuencias pasa a denominarse de multiobjetivo. También es necesario determinar los límites inferiores y superiores de las variables de diseño que se vayan a optimizar (profundidades, espesores y/o tamaño de cavidad).

Los algoritmos utilizados en este trabajo son los implementados por MATLAB[®] en su *Optimization Toolbox*. En concreto para el caso de las optimizaciones de objetivo único se han utilizado los algoritmos **fmincon** y **ga**, y en el caso de multiobjetivo **fminimax** y **gamultiobj**. La utilización de dos algoritmos para la misma optimización permite comprobar si efectivamente se ha obtenido la solución más óptima.

3.3.1. Optimización de objetivo único

La optimización de objetivo único busca minimizar una única variable de salida de la función objetivo, esto es útil en el caso de que se busque una optimización en una sola frecuencia o para múltiples frecuencias en conjunto modificando la función de coste a $f = (\sum_i^n 1 - d_i) / n$, si se desea optimizar para múltiples frecuencias individualmente se debe utilizar la optimización multiobjetivo explicada en el punto 3.3.2.

El primero de los dos algoritmos de objetivo único utilizados es **fmincon**, que trata de minimizar el valor de la función $f(\omega)$ a partir de unos valores iniciales de diseño basándose en las condiciones KKT, desarrolladas por Kuhn y Tucker (1951) a partir del trabajo de Karush (1939). La descripción completa del método se puede encontrar en Byrd y cols. (2000) y Waltz y cols. (2005).

Una vez se alcanza el mínimo de la función (valor 0) o se alcanza el límite de iteraciones (elegido arbitrariamente) se obtienen los mejores parámetros de diseño para la frecuencia buscada.

El segundo, **ga**, es un algoritmo genético (Holland, 1975), este algoritmo parte de unos valores aleatorios con los que genera una serie de posibles soluciones y prueba la función de coste $f(\omega)$ con estas, de las posibles soluciones se cruzan las peores y las mejores para obtener otras posibles soluciones que pueden ser mejores o peores, finalmente se descartan las peores y las mejores se mutan, es decir, se modifican sus variables (profundidad, espesor y/o tamaño de cavidad). Una vez se alcanza el límite de iteraciones se selecciona la mejor solución.

3.3.2. Optimización multiobjetivo

Este tipo de optimización es útil cuando se busca minimizar una función que tiene múltiples variables de salida. En nuestro caso, si se desea optimizar el difusor para múltiples frecuencias se debe analizar los coeficientes de difusión de cada una de las frecuencias por separado para conseguir finalmente la mejor opción posible para todas ellas simultáneamente.

El algoritmo **fminimax** se basa en un algoritmo muy utilizado en teoría de juegos, el *Min-Max* (Brayton y cols., 1979). Lo que realiza es la búsqueda del mínimo de los máximos valores de salida de la función de coste, es decir, si se ejecuta la optimización para tres frecuencias la función de coste tiene 3 variables de salida, que todas ellas se intentan minimizar a 0, de esas tres variables se escoge la máxima y si ese valor no es 0, el algoritmo sigue buscando posibles

soluciones hasta llegar a valor 0 o al límite de iteraciones. Debido a su funcionamiento en la mayoría de las ocasiones obtiene el mismo valor para todas las variables de salida de la función de coste, es decir, para el ejemplo de las tres frecuencias generalmente obtendrá un diseño que ofrezca el mismo valor de difusión para todas ellas.

El algoritmo **gamultiobj**, es un algoritmo genético como el explicado en el punto anterior con la salvedad de que se obtienen múltiples soluciones óptimas. De estas soluciones optimas se debe elegir una a partir criterios menos matemáticos o físicos como puede ser la viabilidad/coste de producción debido a las dimensiones propuestas.

4. Resultados

En este punto se va a mostrar la validez del modelo teórico o analítico (TMM) realizando comparaciones con el mismo modelo realizado con FEM. Después se mostraran los resultados de dos diseños de difusor, estándar y *subwavelength*, con y sin placa. Por último se han realizado algunas optimizaciones para mostrar las posibilidades del diseño de difusores con resonadores de placa.

Las características de los materiales utilizados en los cálculos se muestran en el anexo A.1.

4.1. Validación del método analítico

Para validar el modelo analítico (TMM) desarrollado en este trabajo (punto 3.1) se ha comparado el mismo modelo realizado con FEM. Se han realizado comparaciones tanto de una cavidad simple con placa como de un QRD con placa.

4.1.1. Cavidad simple con placa

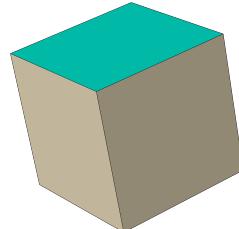


Figura 4.1: Modelo de una cavidad con placa realizado con FEM en COMSOL.

Para comparar los resultados de una cavidad simple con placa se analiza el coeficiente de reflexión, concretamente su fase.

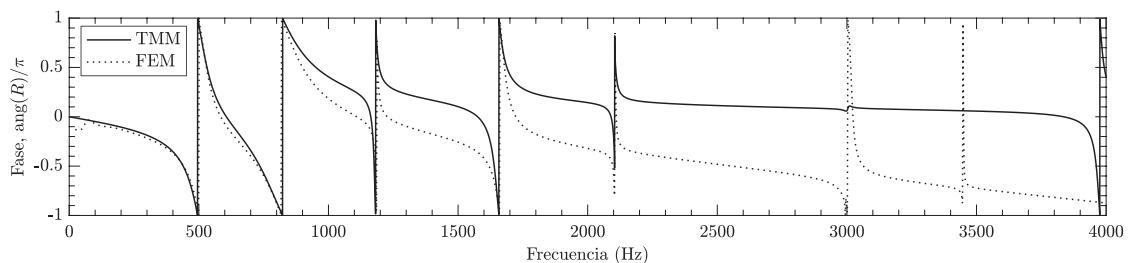


Figura 4.2: Comparación TMM y FEM de la fase de la reflexión de una cavidad de 4cm de lado y 4cm de profundidad con placa de 0.1mm de espesor.

Como se puede observar en la figura 4.2 los cambios de fase del coeficiente de reflexión coinciden aunque, según aumenta la frecuencia, la fase en FEM se retrasa. Estos resultados son esperanzadores por lo que se procede a comparar un difusor completo y verificar así la validez del modelo.

4.1.2. QRD con placa

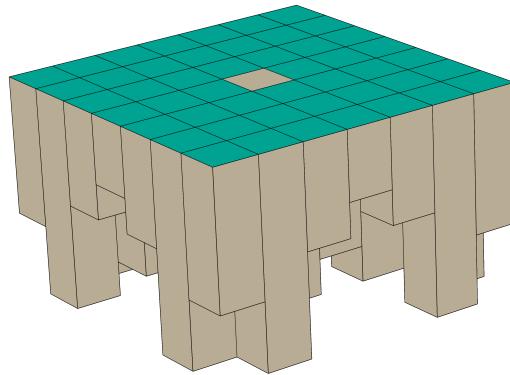


Figura 4.3: Modelo QRD con placas realizado con FEM en COMSOL.

Los diagramas polares en campo lejano del scattering son muy similares como se puede observar en la figura 4.4. Las pequeñas diferencias se deben mayoritariamente a la construcción del modelo FEM, donde se producen reflexiones en los contornos laterales no contemplados en el modelo analítico.

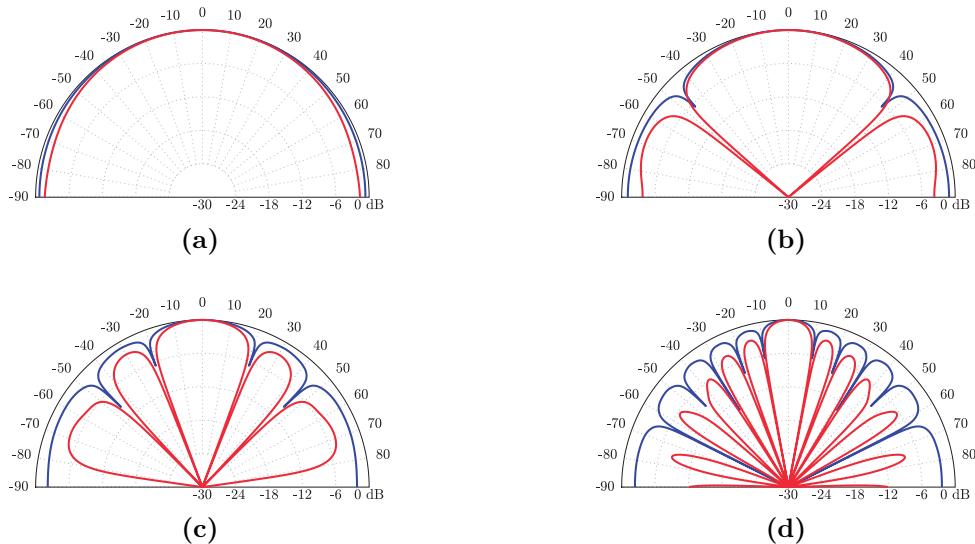


Figura 4.4: QRD de un periodo con $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz y placas de 0.1 mm de espesor: a) 1 kHz. b) 2 kHz. c) 4 kHz. d) 8 kHz. El color azul es el modelo analítico y el rojo el modelo FEM.

Por lo tanto, tal como se ha visto en las comparaciones, tanto de una cavidad como de un difusor completo, se puede asegurar que el modelo analítico está validado y que puede ser utilizado para continuar con el estudio de este trabajo.

4.2. Comparaciones con y sin placa

Para analizar el efecto en una cavidad al incorporar la placa se ha procedido a analizar por un lado la frecuencia de resonancia frente a la profundidad de la cavidad, tanto con placa como sin ella (figura 4.5) y por otro lado la fase del coeficiente de reflexión para 3 profundidades diferentes también con y sin placa (figura 4.6). En todos los casos se ha elegido un tamaño de lado de la cavidad de 5 cm.

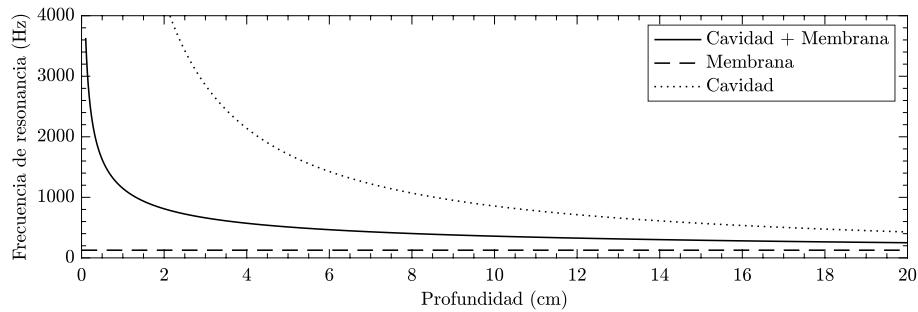


Figura 4.5: Frecuencia de resonancia frente a profundidad de cavidad con y sin placa.

En la figura 4.5 se muestra la frecuencia de resonancia frente a la profundidad, la línea discontinua representa la frecuencia de resonancia de la placa que, como no cambia su espesor ni características, es siempre la misma (127 Hz). La linea de puntos representa las frecuencias de resonancia de la cavidad cuando no se incorpora la placa y la línea negra cuando si hay placa. Como se puede observar la frecuencia de resonancia de la cavidad con placa desciende drásticamente tiendiendo a la resonancia de la placa según aumenta la profundidad.

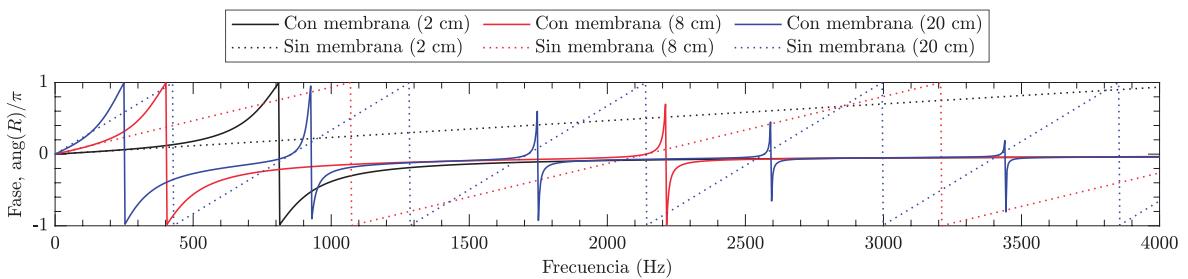


Figura 4.6: Fase del coeficiente de reflexión para diferentes profundidades de cavidad con y sin placa.

Analizando la fase del coeficiente de reflexión (figura 4.6) se observa que una cavidad sin placa de gran profundidad, 20 cm, tiene una resonancia baja pero al incorporar la placa aun se reduce más, casi a la mitad. En el caso contrario con una cavidad de poca profundidad, 2 cm, mientras que la cavidad sola tiene una resonancia muy alta (fuera del eje, 4276 Hz) y

la placa sola tiene una resonancia de 127 Hz, el conjunto produce la primera resonancia en los 807 Hz, es decir, la inclusión de la placa ha reducido algo más de 5 veces la frecuencia de resonancia de la cavidad.

4.3. Distribución de cavidades de residuo cuadrático

A continuación se muestran los resultados obtenidos con un difusor con placas de residuo cuadrático diseñado con los dos métodos, el estándar (2.4.1) y el de fracción de longitud de onda (3.1.7).

4.3.1. Estándar

El diseño estándar explicado anteriormente presenta buenos resultados cuando no se incorporan las placas como se puede observar en la figura 4.7. Las profundidades de cada cavidad son las mismas que se muestran en la explicación del diseño QRD (figura 2.9b).

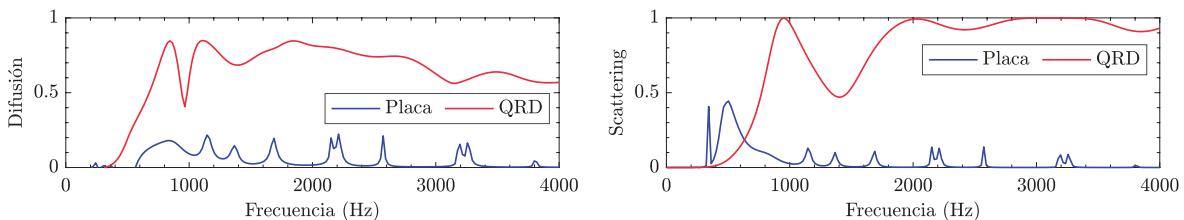


Figura 4.7: Coeficiente de difusión y scattering de un difusor QRD con y sin placa. Con $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz y tamaño de cada cavidad de 10 cm.

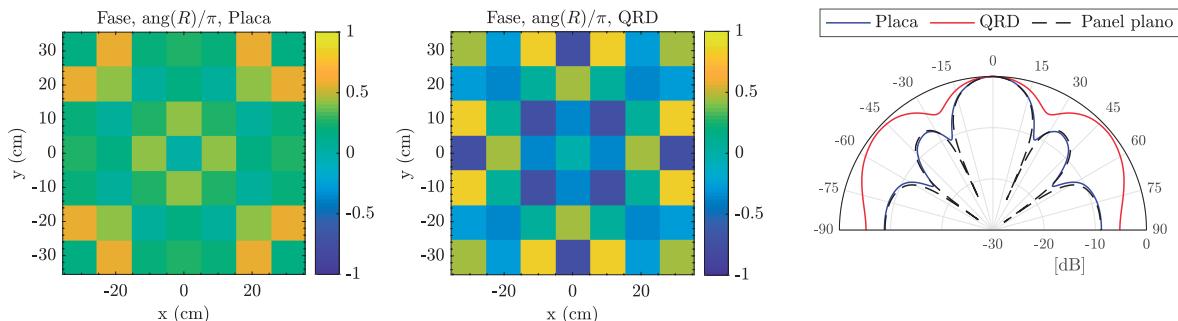


Figura 4.8: Fase del coeficiente de reflexión en cada cavidad y patrón polar en campo lejano de un difusor QRD, con y sin placa, y un panel plano a 1.2 kHz. Con $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz y tamaño de cada cavidad de 10 cm.

4.3.2. Subwavelength

En este caso se ha utilizado el diseño de fracción de longitud de onda explicado en el punto 3.1.7. Los parámetros de diseño son: $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz, $N_\lambda = 40$ y $w = 10$ cm.

Mediante este diseño se consigue que el espesor del difusor no supere el centímetro, 0.9 cm, un espesor mucho menor de lo esperado en un difusor QRD, en concreto, el espesor se reduce

13.7 cm. La difusión y el scattering obtenidos con este diseño tanto con placa como sin ella se encuentran representados en la figura 4.9.

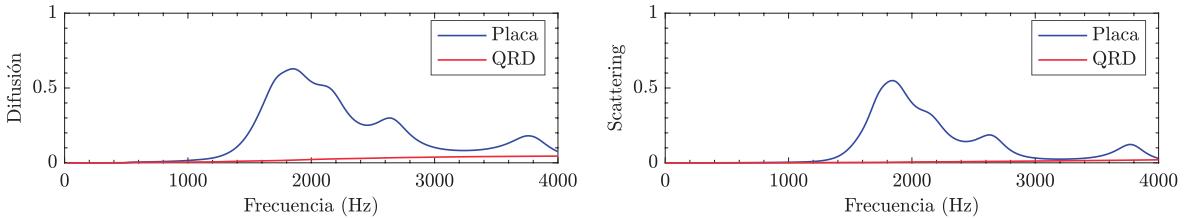


Figura 4.9: Coeficiente de difusión y scattering de un difusor de fracción de longitud de onda con y sin placa (QRD). Con $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz, $N_\lambda = 40$, profundidad máxima de 0.9 cm y tamaño de cada cavidad de 10 cm.

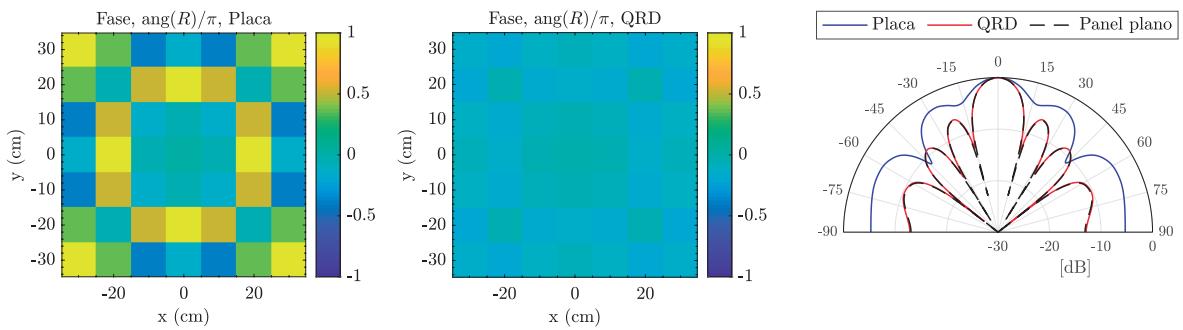


Figura 4.10: Fase del coeficiente de reflexión en cada cavidad y patrón polar en campo lejano de un difusor QRD subwavelength, con y sin placa, y un panel plano a 2 kHz. Con $N = 7$, $f_0 = 1$ kHz, $N_\lambda = 40$, profundidad máxima de 0.9 cm y tamaño de cada cavidad de 10 cm.

4.4. Optimización de un difusor con resonador de placa

Se han realizado múltiples optimizaciones todas ellas con resultados excelentes, a continuación se muestran tres propuestas de diseño optimizadas mediante la optimización multiobjetivo. En todos los diseños se han optimizado profundidades y tamaño de cavidad.

Los parámetros iniciales de diseño se han obtenido a partir de los cálculos desarrollados en el punto 3.1.7 sobre el diseño de fracción de longitud de onda o *subwavelength*. Y los límites de diseño introducidos a los algoritmos de optimización son $0 < d_n < d_{\max}$ (profundidad) y $0.03 < w < 1/N$ (tamaño de cavidad), utilizando $1/N$ se asegura un tamaño total del difusor no superior a 1 metro. Las placas tienen todas el mismo espesor, 0.1 cm.

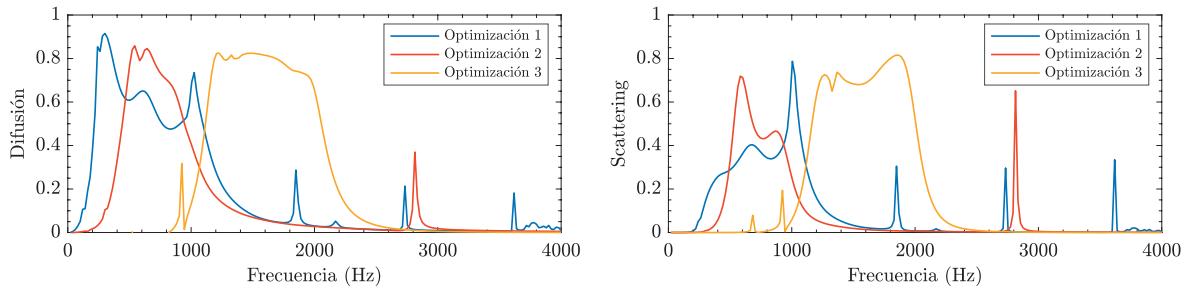


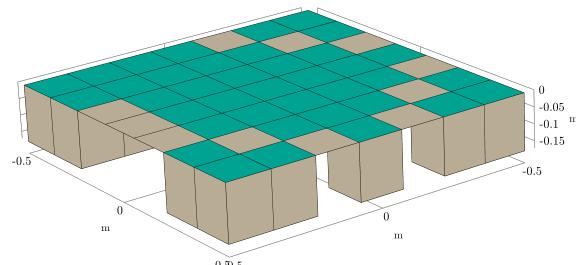
Figura 4.11: Coeficientes de difusión y scattering obtenidos por 3 diseños de difusor con resonadores con placa optimizados.

Las características de cada optimización son las siguientes:

Optimización	Frecuencias de optimización [Hz]	N	f_0 [Hz]	N_λ	d_{\max} [cm]	w [cm]
1	200, 300, 400, 800, 900	7	100	20	17.12	14.29
2	400, 500, 600, 700	7	150	40	5.71	12.77
3	900, 1000, 1100, 1200, 1300, 1400, 1500, 1600	7	500	40	1.71	6.06

Tabla 4.1: Características de las optimizaciones, donde: N es el numero primo generador, f_0 es la frecuencia de diseño, N_λ es la fracción de longitud de onda, d_{\max} es el espesor del difusor y w es el tamaño de lado de las cavidades.

17.12	17.12	0.00	7.48	0.00	17.12	17.12
17.12	0.00	1.65	1.75	1.68	0.00	17.12
0.00	1.56	2.05	4.21	4.27	1.66	0.00
1.40	1.58	4.18	4.12	4.00	1.81	17.12
1.04	1.53	4.23	4.07	2.06	1.78	0.00
17.12	17.12	1.66	1.86	1.78	0.00	17.12
17.12	17.12	0.00	0.00	0.00	17.12	17.12



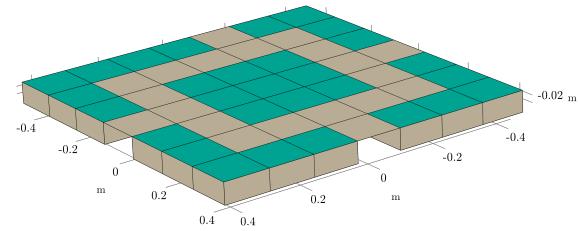
(b) Modelo.

(a) Profundidades (cm).

Figura 4.12: Profundidades y modelo 3D de la optimización 1. Con $N = 7$, $f_0 = 100$ Hz, $N_\lambda = 20$, $d_{\max} = 17.12$ cm y $w = 14.29$ cm.

5.71	5.71	5.71	0.00	5.71	5.71	5.71
5.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.71
0.00	0.00	2.14	2.17	2.15	0.00	5.71
5.71	0.00	2.16	2.20	2.16	0.00	0.00
5.71	0.00	2.12	2.15	2.11	0.00	5.71
5.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.71
5.71	5.71	5.71	0.00	5.71	5.71	5.71

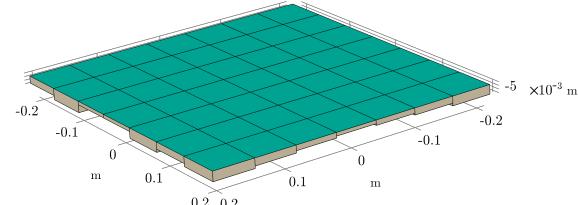
(a) Profundidades (cm).



(b) Modelo.

0.69	0.50	1.71	1.63	1.52	1.32	1.31
0.65	0.54	1.71	1.66	1.19	1.05	0.95
0.64	0.55	1.71	1.71	0.84	0.48	0.71
0.88	0.56	0.53	0.52	0.51	0.49	0.48
1.66	1.71	0.51	0.52	0.52	0.68	0.74
1.58	1.67	1.71	0.50	0.64	0.77	1.04
0.99	1.56	0.47	0.49	1.38	0.95	1.35

(a) Profundidades (cm).



(b) Modelo.

Figura 4.13: Profundidades y modelo 3D de la optimización 2. Con $N = 7$, $f_0 = 150$ Hz, $N_\lambda = 40$, $d_{\max} = 5.71$ cm y $w = 12.77$ cm.

5. Conclusiones

Hoy en día se sigue investigando con intensidad sobre los difusores acústicos, nuevos diseños derivados de los diseños de Schroeder o basados en metamateriales por ejemplo. La mayoría de investigaciones tratan de mejorar prestaciones sin preocuparse en demasiado por las dimensiones del difusor, algo que si ocurre en casi la totalidad de los estudios de difusores basados en metamateriales, buscando reducir las dimensiones consiguiendo al menos las mismas prestaciones que otros difusores, que es justo donde se encuadra este trabajo.

En primer lugar se realizaron modelos analíticos sin pérdidas de difusores con y sin placas, se observó que los resultados tenían coherencia con lo esperado por lo que se procedió a realizar los modelos en FEM para verificar esa coherencia, y sí, los resultados eran similares por lo que se implementó el cálculo de las pérdidas viscotérmicas y viscoelásticas en los modelos analíticos. Como se ha podido ver en los resultados, los modelos analíticos y FEM son muy similares, con cierta diferencia de fase en el coeficiente de reflexión que será analizada en mayor profundidad en el futuro para mejorar el modelo analítico.

Los difusores con placa que se proponen en este trabajo han demostrado que permiten maximizar los parámetros de difusión con un espesor mucho menor que los diseños tradicionales.

También se ha podido observar que las optimizaciones arrojan resultados excepcionales en un ancho de banda limitado, dependiendo de la optimización, alrededor de una octava como sucede con un difusor MLS, es posible que utilizando otros materiales este ancho sea mayor o menor, es necesaria una investigación más profunda para encontrar las diferentes relaciones entre materiales y difusión.

Las ecuaciones implicadas en todo el cálculo de las cavidades y placas es complejo además, la implicación de las placas en los metamateriales continúa en investigación como se puede ver en el trabajo de Huang y cols. (2016), es por ello que los resultados de este trabajo no pueden ser tomados como definitivos sin realizar prototipos y medir la respuesta de estos para comprobar si se obtiene la misma difusión.

5.1. Líneas futuras

Además, aparte de geometrías cuadradas sería interesante estudiar los resultados con cavidades rectangulares, circulares o cualquier otra que pueda ser calculada analíticamente.

Es por todo ello, que este trabajo deja las bases para un estudio mucho más detallado en el que se podría profundizar en diferentes aspectos:

- Diseños diferentes al QRD.
- Cavidades con otras formas geométricas.
- Ubicar las placas dentro de las cavidades y no en el extremo, probando la colocación a diferentes profundidades dentro de la cavidad.

- Otros materiales o combinación de ellos (placas de diferentes características en un mismo difusor).
- Prototipado de modelos y su posterior medida en cámara anecóica para comparar con los modelos analíticos y numéricos.

Bibliografía

- Angus, J., Cox, T., Hughes, R., y Umnova, O. (2008, mayo). Volumetric diffusers. *Audio Engineering Society*(7432).
- Ballesteros, E., Jiménez, N., Groby, J.-P., Dance, S., Aygun, H., y Romero-García, V. (2019). Experimental validation of deep-subwavelength diffusion by acoustic metadiffusers. *Applied Physics Letters*, 115(8), 081901. doi: 10.1063/1.5114877
- Brayton, R., Director, S., Hachtel, G., y Vidigal, L. (1979, Sep.). A new algorithm for statistical circuit design based on quasi-newton methods and function splitting. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26(9), 784-794. doi: 10.1109/TCS.1979.1084701
- Byrd, R. H., Gilbert, J. C., y Nocedal, J. (2000, nov). A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 89(1), 149–185. doi: 10.1007/pl00011391
- Cox, T., Angus, J. A. S., y D'Antonio, P. (2006). Ternary and quadriphase sequence diffusers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(1), 310-319. doi: 10.1121/1.2139632
- Cox, T., Dalenback, B.-I., D'Antonio, P., Embrechts, J.-J., Jeon, J.-Y., Mommertz, E., y Vorländer, M. (2006). A tutorial on scattering and diffusion coefficients for room acoustic surfaces. *Acta acustica united with Acustica*, 92(1), 1-15.
- Cox, T., y D'Antonio, P. (2003). Schroeder diffusers: A review. *Building Acoustics*, 10(1), 1-32. doi: 10.1260/135101003765184799
- Cox, T., y D'Antonio, P. (2016). *Acoustic absorbers and diffusers: Theory, design and application*. CRC Press.
- Cox, T. J., y Lam, Y. W. (1994). Prediction and evaluation of the scattering from quadratic residue diffusers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(1), 297-305. doi: 10.1121/1.408361
- D'Antonio, P., y Cox, T. J. (2000, jun). Diffusor application in rooms. *Applied Acoustics*, 60(2), 113–142. doi: 10.1016/s0003-682x(99)00054-7
- Farina, A. (2000). A new method for measuring the scattering coefficient and the diffusion coefficient of panels. *Acta Acustica united with Acustica*, 86(6), 928-942.
- Holland, J. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. University of Michigan Press.
- Huang, T.-Y., Shen, C., y Jing, Y. (2016). Membrane- and plate-type acoustic meta-materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(6), 3240-3250. doi: 10.1121/1.4950751

- Hughes, R. J., Angus, J. A. S., Cox, T. J., Umnova, O., Gehring, G. A., Pogson, M., y Whittaker, D. M. (2010). Volumetric diffusers: Pseudorandom cylinder arrays on a periodic lattice. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(5), 2847-2856. doi: 10.1121/1.3493455
- ISO 17497-1:2004. (2004, marzo). *Acoustics – sound-scattering properties of surfaces – part 1: Measurement of the random-incidence scattering coefficient in a reverberation room* (Vol. 2004; Standard). Geneva, CH: International Organization for Standardization.
- ISO 17497-2:2012. (2012, mayo). *Acoustics – sound-scattering properties of surfaces – part 2: Measurement of the directional diffusion coefficient in a free field* (Vol. 2012; Standard). Geneva, CH: International Organization for Standardization.
- Jiménez, N., Cox, T. J., Romero-García, V., y Groby, J.-P. (2017, julio). Metadiffusers: Deep-subwavelength sound diffusers. *Scientific Reports*, 7(1), 5389. doi: 10.1038/s41598-017-05710-5
- Karush, W. (1939). *Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions* (Tesis de Master no publicada). Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL, USA.
- Kirchhoff, G. (1868). Ueber den einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik*, 210(6), 177-193. doi: 10.1002/andp.18682100602
- Kuhn, H. W., y Tucker, A. W. (1951). Nonlinear programming. En *Proceedings of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (pp. 481–492). Berkeley, Calif.: University of California Press.
- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T., y Sheng, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485), 1734–1736. doi: 10.1126/science.289.5485.1734
- Miyashita, T. (2005, apr). Sonic crystals and sonic wave-guides. *Measurement Science and Technology*, 16(5), R47–R63. doi: 10.1088/0957-0233/16/5/r01
- Mommertz, E. (2000). Determination of scattering coefficients from the reflection directivity of architectural surfaces. *Applied Acoustics*, 60(2), 201 - 203. doi: 10.1016/S0003-682X(99)00057-2
- Peiró-Torres, M., Navarro, M. P., Ferri, M., Bravo, J., Sánchez-Pérez, J., y Redondo, J. (2019, may). Sonic crystals acoustic screens and diffusers. *Applied Acoustics*, 148, 399–408. doi: 10.1016/j.apacoust.2019.01.004
- Rayleigh, J. W. S. (1894). *The theory of sound*. Macmillan.
- Redondo, J., Picó, R., Sánchez-Morcillo, V. J., y Woszczyk, W. (2013, dec). Sound diffusers based on sonic crystals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6), 4412–4417. doi: 10.1121/1.4828826

- Redondo, J., Sánchez-Morcillo, V., y Picó, R. (2011). The potential for phononic sound diffusers (psd). *Building Acoustics*, 18(1-2), 37-46. doi: 10.1260/1351-010X.18.1-2.37
- Schroeder, M. R. (1975). Diffuse sound reflection by maximum-length sequences. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(1), 149-150. doi: 10.1121/1.380425
- Schroeder, M. R. (1979). Binaural dissimilarity and optimum ceilings for concert halls: More lateral sound diffusion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(4), 958-963. doi: 10.1121/1.382601
- Schroeder, M. R. (1984). *Number theory in science and communication: With applications in cryptography, physics, digital information and computing*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-02395-2
- Schroeder, M. R. (1988). Number-theoretic phase arrays and diffraction gratings with broad radiation (scattering) characteristics. En W. P. Mason y R. Thurston (Eds.), *Physical acoustics - principles and methods* (Vol. 18, p. 1 - 20). Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-477918-1.50007-2
- Schroeder, M. R. (1995). Phase gratings with suppressed specular reflection. *Acta Acustica united with Acustica*, 81(4).
- Stinson, M. R. (1991). The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2), 550-558. doi: 10.1121/1.400379
- Sung, C.-C., y Jan, J. (1997). The response of and sound power radiated by a clamped rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 207(3), 301 - 317. doi: 10.1006/jsvi.1997.1125
- Sánchez-Pérez, J. V., Caballero, D., Martínez-Sala, R., Rubio, C., Sánchez-Dehesa, J., Mesequer, F., ... Gálvez, F. (1998, jun). Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Physical Review Letters*, 80(24), 5325–5328. doi: 10.1103/physrevlett.80.5325
- Waltz, R., Morales, J., Nocedal, J., y Orban, D. (2005, nov). An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, 107(3), 391–408. doi: 10.1007/s10107-004-0560-5
- Xiang, N., y Sessler, G. (2014). *Acoustics, information, and communication: Memorial volume in honor of manfred r. schroeder*. Springer International Publishing.
- Zhu, Y., Fan, X., Liang, B., Cheng, J., y Jing, Y. (2017, Jun). Ultrathin acoustic metasurface-based schroeder diffuser. *Phys. Rev. X*, 7. doi: 10.1103/PhysRevX.7.021034
- Zuazua, E. (2009). *Métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales*. Bilbao, España: Basque Center for Applied Mathematics (BCAM).

A. Datos adicionales de los resultados

A.1. Características físicas de las placas elásticas y del medio

Los parámetros utilizados en los cálculos teóricos y numéricos tanto para el medio (aire) como para las placas elásticas (PMMA) son los siguientes:

Medio (aire)

$\rho = 1.21 \text{ [kg/m}^3]$. Densidad.

$P_0 = 101325 \text{ [Pa]}$. Presión atmosférica.

$\gamma = 1.4$. Proporción de calores específicos.

$P_r = 0.71 \text{ [C}_p\mu/k]$. Número de Prandtl.

$\mu = 1.839e-5 \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$. Viscosidad dinámica.

$c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho} \text{ [m/s]}$. Velocidad del sonido

Placas (PMMA)

$\rho = 1320 \text{ [kg/m}^3]$. Densidad.

$\sigma_\rho = 0.1$. Factor de pérdidas por la densidad.

$E = 4.1e9 \text{ [Pa]}$. Módulo de Young.

$\sigma_E = 1000$. Factor de pérdidas por el módulo de Young.

$\nu = 0.39$. Coeficiente de Poisson.